

Corrigé du devoir surveillé n° 2 (barème)

Les applications — Fonctions numériques

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — barème

Exercice 1 : 9 pts ; Exercice 2 : 11 pts ; total 20 pts, plus 2 bonus de 0,5 pt (note plafonnée à 20). Les points de chaque question sont indiqués entre crochets, avec leur répartition.

Exercice 1 (9 points)

1.a. [0,5 pt] $2 - \frac{5}{x+1} = \frac{2x+2-5}{x+1} = f(x)$ [0,25]. Si $f(x) = 2$, alors $\frac{5}{x+1} = 0$, impossible : pas de solution [0,25].

1.b. [0,5 pt] $2 \in \mathbb{R}$ n'a pas d'antécédent : f n'est pas surjective.

2. [1 pt] Soient $x, x' \neq -1$ avec $f(x) = f(x') : \frac{5}{x+1} = \frac{5}{x'+1}$, donc $x+1 = x'+1$ et $x = x' : f$ est injective.

3.a. [1 pt] *Inclusion directe* [0,5] : pour $x > -1$, $\frac{5}{x+1} > 0$ donc $g(x) < 2$. *Inclusion réciproque* [0,5] : soit $y < 2$; $g(x) = y \iff \frac{5}{x+1} = 2 - y \iff x = \frac{5}{2-y} - 1 = \frac{y+3}{2-y}$, et ce réel vérifie $x+1 = \frac{5}{2-y} > 0$. Donc $g([-1; +\infty]) =]-\infty; 2[$.

3.b. [2 pt] g est surjective (3.a) [0,5] et injective (comme f , question 2) [0,5], donc bijective, et l'unique antécédent de y donne [1] : $g^{-1} :]-\infty; 2[\rightarrow]-1; +\infty[$, $y \mapsto \frac{y+3}{2-y}$.

4. [2 pt] g est croissante sur $] -1; +\infty[$ ($x \mapsto -\frac{5}{x+1}$ l'est). $g(4) = 1$; pour $y \in [1; 2[$, $g^{-1}(y) = \frac{y+3}{2-y} \geq 4 \iff y+3 \geq 8-4y \iff y \geq 1$. Donc $g([4; +\infty]) = [1; 2[$ [1]. $x \in g^{-1}([-3; 0]) \iff -3 \leq g(x) \leq 0$. Or $g(0) = -3$ et $g(\frac{3}{2}) = 0$, g croissante : $g^{-1}([-3; 0]) = [0; \frac{3}{2}]$ [1].

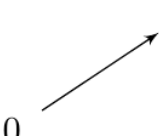
5. [1 pt] Si $A \subset B$ et $y \in h(A) : y = h(x)$ avec $x \in A \subset B$, donc $y \in h(B)$ [0,5]. Comme $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B : h(A) \cup h(B) \subset h(A \cup B)$. Réciproquement, si $y = h(x)$ avec $x \in A \cup B$, alors $x \in A$ (et $y \in h(A)$) ou $x \in B$ (et $y \in h(B)$). D'où l'égalité [0,5].

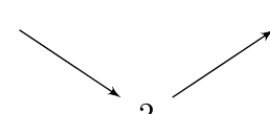
6. [1 pt] Soit $z \in G$. v surjective : il existe $y \in F$ tel que $v(y) = z$. u surjective : il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$. Alors $(v \circ u)(x) = z : v \circ u$ est surjective.

Exercice 2 (11 points)

1.a. [0,5 pt] $D_f = [-6; +\infty[$; $D_g = \mathbb{R}$.

1.b. [1 pt] f est strictement croissante sur $[-6; +\infty[$ [0,5] ; $g(x) = (x-1)^2 + 2$: décroissante sur $] -\infty; 1]$, croissante sur $[1; +\infty[$ [0,5].

x	-6	$+\infty$
$f(x)$		

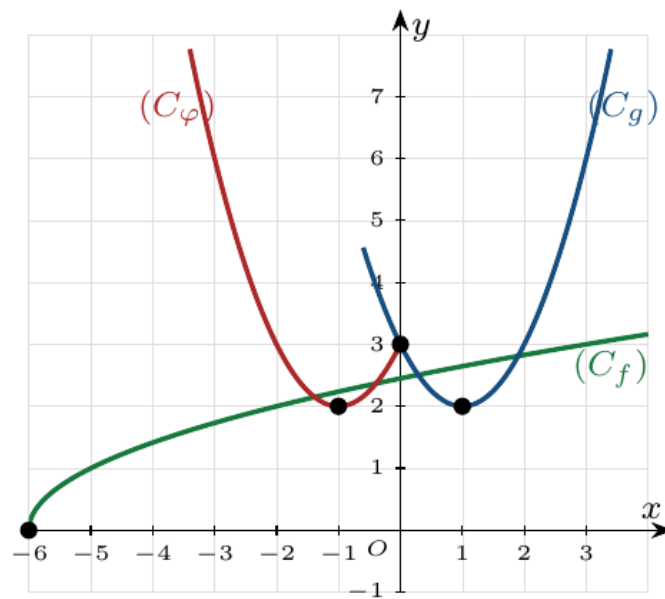
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$			

2. [1 pt] *Méthode 1 (algébrique)* [0,5] : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) - 2 = (x-1)^2 \geq 0$, donc $g(x) \geq 2$, et $g(1) = 2 : 2$ est le minimum de g sur $\mathbb{R}$, atteint en $x = 1$. *Méthode 2 (variations)* [0,5] : d'après le tableau de variations, g est décroissante sur $] -\infty; 1]$ donc $g(x) \geq g(1)$ pour $x \leq 1$, et croissante sur $[1; +\infty[$ donc $g(x) \geq g(1)$ pour $x \geq 1$; ainsi $g(1) = 2$ est le minimum de g sur $\mathbb{R}$.

3. [0,5 pt] (C_g) est la parabole de sommet $\Omega(1; 2)$, d'axe la droite $x = 1$, tournée vers le haut [0,25].

$f(x) = 0 \iff x = -6$ et $f(0) = \sqrt{6}$: (C_f) coupe les axes en $(-6; 0)$ et $(0; \sqrt{6})$ [0,25].

4. [2 pt] (et 6.b) Voir la figure.



5.a. [0,5 pt] f croissante : $f([-6; 3]) = [f(-6); f(3)] = [0; 3]$; $f(-2) = 2$ et, pour $y \geq 2$, $x = y^2 - 6 \geq -2$ vérifie $f(x) = y$: $f([-2; +\infty]) = [2; +\infty[$.

5.b. [0,5 pt] $g(x) < 3 \iff x^2 - 2x < 0 \iff x(x - 2) < 0 \iff x \in]0; 2[$.

5.c. [0,5 pt] Les courbes ont **deux** points communs (d'abscisses comprises entre 0 et 1 pour l'un, entre 1 et 2 pour l'autre) : deux solutions.

5.d. [0,5 pt] Si $m < 2$: aucune solution ; si $m = 2$: une solution ($x = 1$) ; si $m > 2$: deux solutions.

6.a. [1 pt] $D_\varphi = \mathbb{R}$ symétrique et $\varphi(-x) = x^2 - 2|x| + 3 = \varphi(x)$: φ est paire [0,5]. Pour $x \geq 0$, $|x| = x$ et $\varphi(x) = g(x)$ [0,5].

6.b. [1 pt] On garde (C_g) pour $x \geq 0$ et on complète par symétrie d'axe (Oy) : pour $x \leq 0$, $\varphi(x) = x^2 + 2x + 3$, arc de parabole de sommet $(-1; 2)$ (figure).

7.a. [0,5 pt] $D_h = [-6; +\infty[$. Pour $x \geq -6$: $f(x) \in \mathbb{R} = D_g$ et $(g \circ f)(x) = (x + 6) - 2\sqrt{x + 6} + 3 = x + 9 - 2\sqrt{x + 6} = h(x)$.

7.b. [1 pt] Sur $[-6; -5]$: f croissante et $f([-6; -5]) = [0; 1] \subset]-\infty; 1]$ où g décroît : h est **décroissante** [0,5]. Sur $[-5; +\infty[$: $f([-5; +\infty]) = [1; +\infty[$ où g croît : h est **croissante** [0,5].

x	-6	-5	$+\infty$
$h(x)$	3	2	

8. [0,5 pt] Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \pm 1 \in \mathbb{R}$ et $k(x + 1) = E(2x + 2) - 2E(x + 1) = E(2x) + 2 - 2E(x) - 2 = k(x)$.

Bonus 1. [+0,5] Écrivons $x = n + r$ avec $n = E(x)$ et $r \in [0; 1[$. Alors $E(2x) = E(2r + 2n) = E(2r) + 2n$ et $k(x) = E(2r)$. Comme $0 \leq 2r < 2$, $E(2r) \in \{0; 1\}$.

Bonus 2. [+0,5] L'équation (E) : $\sqrt{x + 6} = x + m$ a pour domaine $[-6; +\infty[$. Posons $t = \sqrt{x + 6}$, de sorte que $t \geq 0$ et $x = t^2 - 6$. L'application $x \mapsto \sqrt{x + 6}$ est une bijection de $[-6; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$ (de réciproque $t \mapsto t^2 - 6$) ; donc le nombre de solutions de (E) est égal au nombre de solutions **positives** de

$$t = t^2 - 6 + m \iff t^2 - t + m - 6 = 0 \quad (E').$$

Il faut donc que (E') ait deux racines distinctes **toutes deux positives** :

- discriminant : $\Delta = 1 - 4(m - 6) = 25 - 4m > 0 \iff m < \frac{25}{4}$;
- la somme des racines vaut $1 > 0$, donc les deux racines sont positives si et seulement si leur produit $m - 6 \geq 0$, c'est-à-dire $m \geq 6$ (si $m < 6$, le produit est négatif et une seule racine est positive).

Conclusion : (E) admet exactement deux solutions si et seulement si $m \in \left[6; \frac{25}{4}\right]$. *Contrôle* : pour $m = 6$, $t \in \{0; 1\}$ donne $x = -6$ et $x = -5$, et on vérifie $\sqrt{0} = -6 + 6$, $\sqrt{1} = -5 + 6$.