

Corrigé du devoir surveillé n° 1 (barème)

Notions de logique — Les ensembles

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — barème

Exercice 1 : 10 pts ; Exercice 2 : 4 pts ; Exercice 3 : 6 pts ; total 20 pts, plus 2 bonus de 0,5 pt (note plafonnée à 20). Les points de chaque question sont indiqués entre crochets, avec leur répartition.

Exercice 1 (10 points)

1.a. [1 pt] $\bar{P} : (\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \ 3xy > \frac{x^2 + 9y^2}{2}$ [0,5]. $x^2 - 5x - 14 = (x - 7)(x + 2)$, donc $x = 7$ (par exemple) vérifie $7^2 - 35 - 14 = 0$: Q est vraie [0,5].

1.b. [1 pt] Soient $x, y \in \mathbb{R}$:

$$3xy \leq \frac{x^2 + 9y^2}{2} \iff 0 \leq x^2 - 6xy + 9y^2 \iff 0 \leq (x - 3y)^2,$$

ce qui est vrai. Chaque étape étant réversible (multiplication par $2 > 0$, réécriture), P est vraie.

1.c. [0,5 pt] D'après 1.b (appliquée à $(x; y)$, $(y; z)$, $(z; x)$) : $x^2 + 9y^2 \geq 6xy > 0$, $y^2 + 9z^2 \geq 6yz > 0$, $z^2 + 9x^2 \geq 6zx > 0$. Ces inégalités portent sur des réels strictement positifs, on peut les multiplier membre à membre : $(x^2 + 9y^2)(y^2 + 9z^2)(z^2 + 9x^2) \geq 216x^2y^2z^2$.

2.a. [1 pt] *Disjonction des cas.* Si n est pair, $n(n + 5)$ est pair. Si $n = 2k + 1$, alors $n + 5 = 2(k + 3)$ est pair, donc $n(n + 5)$ aussi.

2.b. [1,5 pt] La contraposée est : « n impair $\implies 8 \mid n^2 + 7$ » [0,5]. Si $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) : $n^2 + 7 = 4k^2 + 4k + 8 = 4k(k + 1) + 8$. Or $k(k + 1)$ est pair, $k(k + 1) = 2m$, donc $n^2 + 7 = 8(m + 1)$ [1]. La contraposée étant vraie, l'implication l'est.

3. [1,5 pt] *Domaine* : $3x - 2 \geq 0$ et $x > 0$, soit $x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$ [0,25]. Pour un tel x , $\sqrt{3x - 2}\sqrt{x} = \sqrt{x(3x - 2)}$, et

$$\sqrt{3x - 2} = \frac{2 - x}{\sqrt{x}} \iff \sqrt{x(3x - 2)} = 2 - x \iff \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 3x^2 - 2x = (2 - x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$$

[0,75]. Or $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$: $x = 1$ ou $x = -2$; seul $x = 1$ appartient à $\left[\frac{2}{3}; 2\right]$. $S = \{1\}$ [0,5].

4. [1,5 pt] *Initialisation* ($n = 0$) : $2 = 1 \times 2$ [0,25]. *Hérédité* : supposons $\sum_{k=0}^n (6k + 2) = (n + 1)(3n + 2)$; alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} (6k + 2) = (n + 1)(3n + 2) + 6n + 8 = 3n^2 + 11n + 10 = (n + 2)(3n + 5) = ((n + 1) + 1)(3(n + 1) + 2)$$

[1]. *Conclusion* pour tout $n \in \mathbb{N}$ [0,25].

5. [0,5 pt] $R : (\exists x \in E) \ x \in A \text{ et } x \notin \bar{B}$, c'est-à-dire $(\exists x \in E) \ x \in A \text{ et } x \in B$.

6.a. [0,5 pt] $n^2 < n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ (car $n \geq 1$), donc $n < \sqrt{n^2 + n} < n + 1$: $\sqrt{n^2 + n}$ est strictement compris entre deux entiers consécutifs, il n'est pas entier.

6.b. [1 pt] *Par l'absurde.* Supposons $\sqrt{\frac{n}{n+1}} \in \mathbb{Q}$. Comme $\sqrt{n^2 + n} = (n + 1)\sqrt{\frac{n}{n+1}}$, on aurait $\sqrt{n^2 + n} \in \mathbb{Q}_+$: $\sqrt{n^2 + n} = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$ et $\text{PGCD}(a; b) = 1$ [0,5]. Alors $n^2 + n = \frac{a^2}{b^2}$ avec $\text{PGCD}(a^2; b^2) = 1$ (admis); comme c'est un entier, b^2 divise a^2 , donc $b^2 = 1$ et $\sqrt{n^2 + n} = a \in \mathbb{N}$, ce qui contredit 6.a [0,5].

Exercice 2 (4 points)

1.a. [1 pt] $(A \cup B) \setminus (A \setminus B) = (A \cup B) \cap \overline{A \setminus B} = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup B = B$ [0,5]. $B \setminus (A \cap B) = B \cap (\overline{A \cap B}) = (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) = B \setminus A$ [0,5].

1.b. [1,5 pt] D'après 1.a : $B = \{0; 1; \dots; 12\} \setminus \{1; 2; 4; 5\} = \{0; 3; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ [0,5] ; $B \setminus A = B \setminus (A \cap B) = \{0; 7; 8; 10; 11\}$ [0,5] ; $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{0; 1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11\}$ [0,5].

2. [1,5 pt] On remarque que $\frac{17\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = \frac{3\pi}{2} = \frac{6\pi}{4}$. $C \subset D$ [0,75] : $\frac{17\pi}{12} + \frac{k\pi}{4} = -\frac{\pi}{12} + \frac{(k+6)\pi}{4} = -\frac{\pi}{12} - \frac{k'\pi}{4}$ avec $k' = -k - 6 \in \mathbb{Z}$. $D \subset C$ [0,75] : $-\frac{\pi}{12} - \frac{k'\pi}{4} = \frac{17\pi}{12} + \frac{k''\pi}{4}$ avec $k'' = -k' - 6 \in \mathbb{Z}$. Donc $C = D$.

Exercice 3 (6 points)

1.a. [0,5 pt] ($\implies$) Supposons $\overline{A} \subset B$. On a toujours $A \cup B \subset E$. Soit $x \in E$: si $x \in A$, alors $x \in A \cup B$; sinon $x \in \overline{A} \subset B$, donc $x \in A \cup B$. Ainsi $E \subset A \cup B$ et $A \cup B = E$ [0,25]. ($\impliedby$) Supposons $A \cup B = E$. Soit $x \in \overline{A}$: $x \in E = A \cup B$ et $x \notin A$, donc $x \in B$. Ainsi $\overline{A} \subset B$ [0,25].

1.b. [1 pt] $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = [(A \setminus B) \cup (A \cap B)] \cup (B \setminus A) = A \cup (B \setminus A) = A \cup B$, car $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = A \cap (\overline{B} \cup B) = A$ et $A \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) = A \cup B$.

1.c. [1,5 pt] Soit $x \in B$. *Disjonction des cas.* Si $x \in A$ [0,75] : $x \in A \cap B \subset A \cap C$, donc $x \in C$. Si $x \notin A$ [0,75] : $x \in A \cup B \subset A \cup C$ et $x \notin A$, donc $x \in C$. Dans les deux cas $x \in C$: $B \subset C$.

2. [1 pt] Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $n = 2m$ est pair, $n = 2(m-2) + 4 \in A$; si $n = 2m+1$ est impair, $n = 2(m+1) - 1 \in B$. Donc $\mathbb{Z} \subset A \cup B$ [0,75]. Comme $A \subset \mathbb{Z}$ et $B \subset \mathbb{Z}$, $A \cup B \subset \mathbb{Z}$, d'où $A \cup B = \mathbb{Z}$ [0,25].

3.a. [1 pt] $B \subset A$ [0,5] : soit $(x; y) \in B$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = 1 - t$ et $y = 1 + 2t$; alors $2x + y = 2(1 - t) + (1 + 2t) = 3$, donc $(x; y) \in A$. $A \subset B$ [0,5] : soit $(x; y) \in A$, donc $y = 3 - 2x$. Posons $t = 1 - x \in \mathbb{R}$; alors $1 - t = x$ et $1 + 2t = 3 - 2x = y$, donc $(x; y) \in B$. Ainsi $A = B$.

3.b. [1 pt] *Par l'absurde* [0,75] : supposons $A \cap D \neq \emptyset$; il existe $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $2x + y = 3$ et $4x + 2y = 5$. En multipliant la première égalité par 2 : $4x + 2y = 6$, d'où $6 = 5$, absurde. Donc $A \cap D = \emptyset$. *Déduction* [0,25] : soit $(x; y) \in B$; d'après 3.a, $(x; y) \in A$, donc $(x; y) \notin D$ (sinon $(x; y) \in A \cap D$). Ainsi $B \subset \overline{D}$.

Bonus

Bonus 1 [+0,5]. Supposons $A \Delta B = A \Delta C$. Rappel : $x \in A \Delta B$ si et seulement si x appartient à exactement un des deux ensembles A, B . $B \subset C$: soit $x \in B$. *Disjonction des cas.* - Si $x \in A$: $x \in A \cap B$, donc $x \notin A \Delta B = A \Delta C$. Comme $x \in A$ et $x \notin A \Delta C$, on a $x \in C$ (sinon $x \in A \setminus C \subset A \Delta C$). - Si $x \notin A$: $x \in B \setminus A \subset A \Delta B = A \Delta C$. Comme $x \notin A$, on a nécessairement $x \in C \setminus A$, donc $x \in C$.

Dans les deux cas $x \in C$: $B \subset C$. Les rôles de B et C étant symétriques dans l'hypothèse, on obtient de même $C \subset B$, d'où $B = C$.

Bonus 2 [+0,5]. $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$, *par l'absurde*. Supposons $\sqrt{6} = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$ et $\text{PGCD}(a; b) = 1$. Alors $a^2 = 6b^2$ est pair, donc a est pair (si a était impair, a^2 le serait) : $a = 2c$ avec $c \in \mathbb{N}$. Il vient $4c^2 = 6b^2$, soit $3b^2 = 2c^2$: $3b^2$ est pair, donc b^2 est pair (car 3 est impair), donc b est pair. Ainsi a et b sont pairs, donc 2 divise $\text{PGCD}(a; b)$, ce qui contredit $\text{PGCD}(a; b) = 1$. Donc $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$. *Déduction, par l'absurde.* Supposons $r = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Alors $r^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$, donc $\sqrt{6} = \frac{r^2 - 5}{2} \in \mathbb{Q}$ (car $\mathbb{Q}$ est stable par produit, différence et quotient par 2), ce qui contredit le résultat précédent. Donc $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.