

Corrigé du devoir maison n° 4

Suites numériques — Trigonométrie

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — méthodes utilisées

- **Suites** : récurrence ; signe de $u_{n+1} - u_n$ factorisé ; suite auxiliaire géométrique ; inégalité $|u_{n+1} - \ell| \leq k|u_n - \ell|$ itérée par récurrence ; sommes géométriques.
- **Trigonométrie** : duplication, addition, formules en $t = \tan \frac{x}{2}$, transformations somme–produit dans un triangle, $a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \alpha)$, cercle trigonométrique.
- Tous les résultats ont été contrôlés avec Python/sympy (`build/verif_lot4.py`).

Exercice 1

- $0 \leq u_0 = 0 < 4$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq u_n < 4$. Alors $u_n + 2 > 0$, $u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2} > 0$ et $u_{n+1} - 4 = \frac{5u_n + 4 - 4u_n - 8}{u_n + 2} = \frac{u_n - 4}{u_n + 2} < 0$. Par récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 \leq u_n < 4$.
- $u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n + 4 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{-(u_n^2 - 3u_n - 4)}{u_n + 2} = \frac{(4 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 2} > 0$: (u_n) est strictement croissante.
- a.** $u_{n+1} + 1 = \frac{6u_n + 6}{u_n + 2}$, donc $v_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n + 2} \times \frac{u_n + 2}{6(u_n + 1)} = \frac{1}{6}v_n$. (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de premier terme $v_0 = -4$.
- b.** $v_n = -4 \left(\frac{1}{6}\right)^n$. De $v_n(u_n + 1) = u_n - 4$: $u_n(1 - v_n) = 4 + v_n$ et $1 - v_n > 0$, donc $u_n = \frac{4 + v_n}{1 - v_n} = \frac{4 \times 6^n - 4}{6^n + 4}$. (Contrôle : $u_0 = 0$, $u_1 = 2$.)
- a.** D'après 1 : $|u_{n+1} - 4| = \frac{|u_n - 4|}{u_n + 2}$ et $u_n + 2 \geq 2$, donc $|u_{n+1} - 4| \leq \frac{1}{2}|u_n - 4|$.
- b.** Pour $n = 0$: $|u_0 - 4| = 4 \leq 4$. Si $|u_n - 4| \leq 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n$, alors $|u_{n+1} - 4| \leq \frac{1}{2} \times 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Par récurrence, l'inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- $S_n = -4 \times \frac{1 - (1/6)^{n+1}}{1 - 1/6} = -\frac{24}{5} \left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right)$. Ensuite $1 - v_k = \frac{(u_k + 1) - (u_k - 4)}{u_k + 1} = \frac{5}{u_k + 1}$, d'où

$$T_n = \sum_{k=0}^n (1 - v_k) = (n + 1) - S_n = n + 1 + \frac{24}{5} \left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right).$$

Exercice 2

- $u_3 = 10 - 4 = 6$, $u_4 = 30 - 8 = 22$, $v_1 = \frac{u_2}{u_1} = 2$.
- $v_{n+1} = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{5u_{n+1} - 4u_n}{u_{n+1}} = 5 - 4 \frac{u_n}{u_{n+1}} = 5 - \frac{4}{v_n}$.
- $1 < v_1 = 2 < 4$. Si $1 < v_n < 4$, alors $v_n > 0$, $v_{n+1} - 1 = \frac{4(v_n - 1)}{v_n} > 0$ et $v_{n+1} - 4 = \frac{v_n - 4}{v_n} < 0$. Par récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 1 < v_n < 4$.
- $v_{n+1} - v_n = \frac{5v_n - 4 - v_n^2}{v_n} = \frac{(v_n - 1)(4 - v_n)}{v_n} > 0$: la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est (strictement) croissante.
- a.** $v_n \neq 1$ donc t_n est défini, et $t_{n+1} = \frac{v_{n+1} - 4}{v_{n+1} - 1} = \frac{(v_n - 4)/v_n}{4(v_n - 1)/v_n} = \frac{1}{4}t_n$.
- b.** $t_1 = \frac{2-4}{2-1} = -2$, donc $t_n = -2 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$. De $t_n(v_n - 1) = v_n - 4$: $v_n = \frac{4 - t_n}{1 - t_n} = \frac{4 + 2 \times 4^{1-n}}{1 + 2 \times 4^{1-n}}$; en multipliant par 4^{n-1} : $v_n = \frac{4^n + 2}{4^{n-1} + 2}$.

6. $u_1 = \frac{1+2}{3} = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n = \frac{4^{n-1}+2}{3}$; alors $u_{n+1} = v_n u_n = \frac{4^n+2}{4^{n-1}+2} \times \frac{4^{n-1}+2}{3} = \frac{4^n+2}{3}$. Conclusion par récurrence. (Contrôle : $u_4 = \frac{64+2}{3} = 22$.)

Exercice 3

1. a. $\cos \frac{\pi}{6} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1$, donc $\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$. Comme $\cos \frac{\pi}{12} > 0$: $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$. Or $\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{16} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$ et $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} > 0$: $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

1. b. Méthode 1 : $\sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2$ et $\sin \frac{\pi}{12} > 0$. Méthode 2 : $\sin \frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dans les deux cas : $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

1. c. Méthode 1 : $\tan \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{4} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}$. Méthode 2 : $\tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3}$.

Puis méthode 1 : $\tan\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2 - \sqrt{3} + 1}{1 - (2 - \sqrt{3})} = \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3}$; méthode 2 : $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$ et $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

2. $\cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

$\sin 3x = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x = -4 \sin^3 x + 3 \sin x$.

Lorsque $\tan x$, $\tan 2x$ et $\tan 3x$ sont définis et $1 - 3 \tan^2 x \neq 0$: $\tan 3x = \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x}$ avec $\tan 2x = \frac{2t}{1-t^2}$

($t = \tan x$) ; en multipliant par $1 - t^2$: $\tan 3x = \frac{2t + t - t^3}{1 - t^2 - 2t^2} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$.

3. $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, donc $\cos \frac{x}{2} \neq 0$ et $1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}$. Alors $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} (1 - t^2) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2t \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$. Si $\cos x \neq 0$ (donc $t^2 \neq 1$) : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2t}{1-t^2}$. Si $\sin x \neq 0$ (donc $t \neq 0$) : $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{(1+t^2) - (1-t^2)}{2t} = t$.

4. a. $\sin 2x + \sin 2y = 2 \sin(x+y) \cos(x-y) = 2 \sin z \cos(x-y)$ et $\sin 2z = 2 \sin z \cos z = -2 \sin z \cos(x+y)$. Donc la somme vaut $2 \sin z (\cos(x-y) - \cos(x+y)) = 4 \sin x \sin y \sin z$.

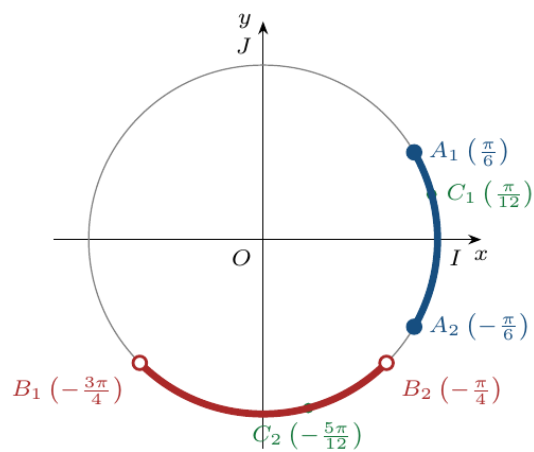
4. b. $\frac{z}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{x+y}{2}$. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 2 \sin \frac{z}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ et $\cos z = 1 - 2 \sin^2 \frac{z}{2} = 1 - 2 \sin \frac{z}{2} \cos \frac{x+y}{2}$. La somme vaut $1 + 2 \sin \frac{z}{2} \left(\cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2}\right) = 1 + 4 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{z}{2}$.

4. c. $\sin^2 x + \sin^2 y = 1 - \frac{\cos 2x + \cos 2y}{2} = 1 - \cos(x+y) \cos(x-y) = 1 + \cos z \cos(x-y)$ et $\sin^2 z = 1 - \cos^2 z = 1 + \cos z \cos(x+y)$. La somme vaut $2 + \cos z (\cos(x-y) + \cos(x+y)) = 2 + 2 \cos x \cos y \cos z$.

5. a.

- $2 \cos x - \sqrt{3} = 0 \iff \cos x = \cos \frac{\pi}{6} \iff x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi$. Dans $] -\pi; \pi]$: $\left\{-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right\}$.
- $\sqrt{2} \sin x + 1 = 0 \iff \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \iff x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$. Dans $] -\pi; \pi]$: $\left\{-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right\}$.
- $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ ($r = 2$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$, $\alpha = -\frac{\pi}{6}$). L'équation équivaut à $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi$. Dans $] -\pi; \pi]$: $\left\{-\frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{12}\right\}$.

5. b. Voir la figure (points A_1, A_2 : première équation ; B_1, B_2 : deuxième ; C_1, C_2 : troisième).



5. c. $2 \cos x - \sqrt{3} \geq 0 \iff \cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$: arc $[A_2 A_1]$ contenant I , soit $S = [-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}]$. $\sqrt{2} \sin x + 1 < 0 \iff \sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$: arc ouvert $]B_1 B_2[$ situé sous la droite $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, soit $S' =]-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}[$.