

Corrigé du devoir maison n° 3

Barycentre — Analytique du produit scalaire

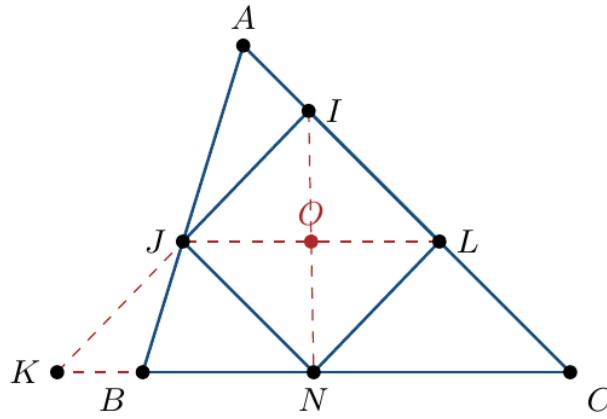
1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — méthodes utilisées

- **Barycentre** : propriété caractéristique $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$ pour tout point M ; associativité (barycentres partiels) ; homogénéité.
- **Analytique** : expression analytique du produit scalaire et du déterminant ; vecteur normal ; distance d'un point à une droite ; équations de cercles ; tangentes ; inégalités de Cauchy-Schwarz et triangulaire.
- Tous les résultats ont été contrôlés avec Python/sympy (build/verif_lot3.py).

Exercice 1

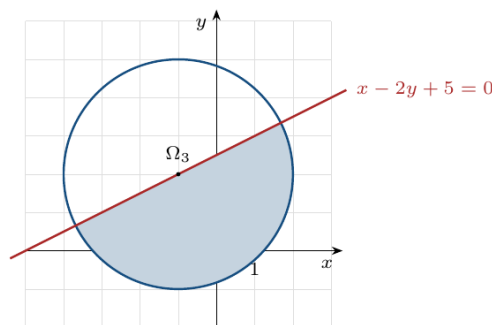
- $5\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB}$ s'écrit, avec Chasles ($\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB}$) : $5\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC} - 6\overrightarrow{AK} - 6\overrightarrow{KB} = 5\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC} - 6\overrightarrow{KB}$. Donc $\overrightarrow{KC} = 6\overrightarrow{KB}$, soit $\overrightarrow{KC} + 5\overrightarrow{KK} = 6\overrightarrow{KB}$: c'est la propriété caractéristique de $\text{bar}\{(C;1);(K;5)\}$ au point K ; ainsi $B = \text{bar}\{(C;1);(K;5)\}$ (poids $6 \neq 0$).
- a.** B est le barycentre partiel de $(C;1)$ et $(K;5)$, de poids 6 ; par associativité : $J = \text{bar}\{(A;4);(B;6)\}$.
- b.** Par homogénéité (on divise les poids par 2) : $J = \text{bar}\{(A;2);(B;3)\}$.
- a.** $I = \text{bar}\{(A;4);(C;1)\}$: propriété caractéristique au point C : $4\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CC} = 5\overrightarrow{CI}$, d'où $\overrightarrow{CI} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CA}$.
- b.** I est le barycentre partiel de $(A;4)$ et $(C;1)$, de poids 5 ; par associativité, $J = \text{bar}\{(I;5);(K;5)\}$: poids égaux, J est le milieu de $[KI]$.
- a.** N milieu de $[CK]$: $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{NK} = \vec{0}$, puis on multiplie par 5.
- b.** Propriété caractéristique de $B = \text{bar}\{(C;1);(K;5)\}$ au point N : $\overrightarrow{NC} + 5\overrightarrow{NK} = 6\overrightarrow{NB}$, d'où $5\overrightarrow{NK} = 6\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC}$.
- c.** On reporte dans 4.a : $5\overrightarrow{NC} + 6\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = \vec{0}$, soit $6\overrightarrow{NB} + 4\overrightarrow{NC} = \vec{0}$, ou $3\overrightarrow{NB} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$: $N = \text{bar}\{(B;3);(C;2)\}$. Et $3\overrightarrow{NB} = -2\overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{CN}$.
- a.** L milieu de $[CI]$: $\overrightarrow{IL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$.
- b.** $\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{CI} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{CA} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$ (3.a), donc $\overrightarrow{IL} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.
- a.** Propriété caractéristique de $J = \text{bar}\{(A;2);(B;3)\}$ au point N : $2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} = 5\overrightarrow{NJ}$, d'où $3\overrightarrow{NB} = 5\overrightarrow{NJ} - 2\overrightarrow{NA}$.
- b.** Avec $[\beta]$: $5\overrightarrow{NJ} - 2\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{CN}$, donc $5\overrightarrow{NJ} = 2(\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NA}) = 2\overrightarrow{CA}$, soit $\overrightarrow{NJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{JN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.
- c.** $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{JN}$ (5.b et 6.b) ; de plus $I, L \in (AC)$ alors que $J \in (AB)$, $J \neq A$, n'est pas sur (AC) : les quatre points ne sont pas alignés. Donc $ILNJ$ est un **parallélogramme**.



7. a. Les diagonales $[IN]$ et $[LJ]$ ont pour milieu commun O : $\vec{OI} + \vec{ON} = \vec{0}$ et $\vec{OL} + \vec{OJ} = \vec{0}$; on additionne.
7. b. Propriété caractéristique au point O : de $I = \text{bar}\{(A; 4); (C; 1)\}$: $4\vec{OA} + \vec{OC} = 5\vec{OI}$; de $L = \text{bar}\{(C; 1); (I; 1)\}$: $\vec{OC} + \vec{OI} = 2\vec{OL}$, multiplié par 5; de $N = \text{bar}\{(B; 3); (C; 2)\}$: $3\vec{OB} + 2\vec{OC} = 5\vec{ON}$; de $J = \text{bar}\{(A; 2); (B; 3)\}$: $2\vec{OA} + 3\vec{OB} = 5\vec{OJ}$.
7. c. D'après 7.a, $5\vec{OI} + 5\vec{OL} + 5\vec{ON} + 5\vec{OJ} = \vec{0}$. Or $5\vec{OL} = \frac{1}{2}(5\vec{OC} + 5\vec{OI}) = \frac{1}{2}(5\vec{OC} + 4\vec{OA} + \vec{OC}) = 2\vec{OA} + 3\vec{OC}$. En remplaçant : $(4\vec{OA} + \vec{OC}) + (2\vec{OA} + 3\vec{OC}) + (3\vec{OB} + 2\vec{OC}) + (2\vec{OA} + 3\vec{OB}) = \vec{0}$, soit $8\vec{OA} + 6\vec{OB} + 6\vec{OC} = \vec{0}$, ou $4\vec{OA} + 3\vec{OB} + 3\vec{OC} = \vec{0}$. Comme $4 + 3 + 3 \neq 0$: $O = \text{bar}\{(A; 4); (B; 3); (C; 3)\}$.

Exercice 2

- $\vec{AC}(2; 2)$, $\vec{AB}(1 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$. $AC = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; $AB^2 = (4 + 2\sqrt{3}) + (4 - 2\sqrt{3}) = 8$, $AB = 2\sqrt{2}$. $\det(\vec{AC}; \vec{AB}) = 2(1 - \sqrt{3}) - 2(1 + \sqrt{3}) = -4\sqrt{3}$; $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 2(1 + \sqrt{3}) + 2(1 - \sqrt{3}) = 4$.
- $\cos(\widehat{\vec{AC}; \vec{AB}}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $\sin(\widehat{\vec{AC}; \vec{AB}}) = \frac{-4\sqrt{3}}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Mesure principale : $-\frac{\pi}{3}$.
- $AB = AC$ et l'angle en A mesure $\frac{\pi}{3}$ (en valeur absolue) : ABC est **équilatéral**.
- $S = \frac{1}{2}|\det(\vec{AC}; \vec{AB})| = 2\sqrt{3}$.
- $\vec{DA}(-2; 2)$, ou $(1; -1)$, est normal à (Δ) : $(x - 2) - (y - 1) = 0 \iff x - y - 1 = 0$.
- $(D') : x + y - 4 = 0$ a pour vecteur normal $(1; 1)$, et $(1; 1) \cdot (1; -1) = 0$: $(D') \perp (\Delta)$.
- $d(E; (\Delta)) = \frac{|5 - 0 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.
- $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 4$: (C_1) est le cercle de centre $(-1; 3)$, de rayon 2; $(C_1) : x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$.
- Méthode 1 : $M \in (C_2) \iff \vec{AM} \cdot \vec{CM} = 0 \iff x(x - 2) + (y + 1)(y - 1) = 0 \iff x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$.
Méthode 2 : centre $\Omega_2(1; 0)$ (milieu de $[AC]$), rayon $\frac{AC}{2} = \sqrt{2}$: $(x - 1)^2 + y^2 = 2$, même équation.
- $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \cos \theta \\ y = \sqrt{2} \sin \theta \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}$.
- $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1 + 4 + 4 = 9$: cercle de centre $\Omega_3(-1; 2)$ et de rayon 3.
- La seconde inéquation : disque **fermé** de bord (C_3) . La droite $x - 2y + 5 = 0$ passe par Ω_3 ($-1 - 4 + 5 = 0$); O vérifie $5 \geq 0$: on garde le demi-plan fermé contenant O . Solution : le demi-disque fermé coloré (bords compris).



14. Méthode 1 : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ passant par A, C, D : $-b + c = -1$; $2a + b + c = -5$; $2a - 3b + c = -13$. Par différences : $4b = 8$, $b = 2$, $c = 1$, $a = -4$: (C_4) : $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$. Méthode 2 : $\overrightarrow{AC}(2; 2)$ et $\overrightarrow{AD}(2; -2)$: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, le triangle ACD est rectangle en A , donc (C_4) est le cercle de diamètre $[CD]$: centre $(2; -1)$, rayon 2, $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$, même équation.

Exercice 3

1. $d(O; (\Delta)) = \frac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{5}$: sécante. Avec $y = 1 - x$: $2x^2 - 2x - 4 = 0 \iff (x - 2)(x + 1) = 0$. Points : $(2; -1)$ et $(-1; 2)$.

2. $a^2 + b^2 - 4c = 4m^2 + 4m^2 + 8m + 20 = 4(2m^2 + 2m + 5)$, et $2m^2 + 2m + 5$ a pour discriminant $4 - 40 < 0$: il est strictement positif. (C_m) est le cercle de centre $\Omega_m(-m; -m)$ et de rayon $R_m = \sqrt{2m^2 + 2m + 5}$.

3. Ω_m vérifie $y = x$; réciproquement, tout point $(t; t)$ est Ω_{-t} . Donc (D) : $x - y = 0$.

4. L'équation s'écrit $(x^2 + y^2 - 5) + 2m(x + y - 1) = 0$. M est sur tous les (C_m) $\iff x^2 + y^2 - 5 = 0$ et $x + y - 1 = 0$ (polynôme en m nul pour tout m) $\iff M \in (C) \cap (\Delta)$. D'après 1 : $I(2; -1)$ et $J(-1; 2)$.

5. $\overrightarrow{IJ}(-3; 3)$ et $\vec{u}(1; 1)$ dirige (D) : $\overrightarrow{IJ} \cdot \vec{u} = 0$.

6. $A \in (C_m) \iff (x_0^2 + y_0^2 - 5) + 2m(x_0 + y_0 - 1) = 0$. Si $x_0 + y_0 \neq 1$, la valeur $m = -\frac{x_0^2 + y_0^2 - 5}{2(x_0 + y_0 - 1)}$ convient. Si $x_0 + y_0 = 1$, l'équation devient $x_0^2 + y_0^2 - 5 = 0$: elle a une solution (et alors toutes) si et seulement si $A \in (C) \cap (\Delta) = \{I; J\}$. **Condition** : $x_0 + y_0 \neq 1$, ou $A \in \{I; J\}$ (autrement dit, $A \notin (\Delta)$ ou $A = I$ ou $A = J$).

7. (C_1) : $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 7 = 0$, soit $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$: $\Omega_1(-1; -1)$, $R = 3$. $\Omega_1 B^2 = 9 + 16 = 25 > 9$: B est extérieur. La droite $x = 2$ est à la distance $|2 + 1| = 3 = R$ de Ω_1 : c'est une tangente. Les autres droites passant par B : $mx - y + 3 - 2m = 0$, tangentes $\iff \frac{|-3m + 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3 \iff (4 - 3m)^2 = 9m^2 + 9 \iff m = \frac{7}{24}$. Tangentes : $x - 2 = 0$ et $7x - 24y + 58 = 0$.

8. a. Soient $\vec{u}(a_1; a_2)$ et $\vec{v}(\frac{1}{a_1}; \frac{2}{a_2})$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 + 2 = 3$. Cauchy-Schwarz : $9 = (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 = (a_1^2 + a_2^2) \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{4}{a_2^2}\right)$.

8. b. Soient $\vec{u}_i(a_i; 1)$: $\|\vec{u}_i\| = \sqrt{a_i^2 + 1}$ et $\sum_{i=1}^n \vec{u}_i = (\sum a_i; n)$. L'inégalité triangulaire généralisée donne $\|\sum \vec{u}_i\| \leq \sum \|\vec{u}_i\|$, c'est-à-dire le résultat.