

# Corrigé du devoir maison n° 2

## Les applications — Fonctions numériques

1<sup>ère</sup> Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

### À retenir

**Rappels utiles.**  $f : E \rightarrow F$  est injective si  $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ ; surjective si tout  $y \in F$  a au moins un antécédent dans  $E$ ; bijective si tout  $y \in F$  a un unique antécédent, noté  $f^{-1}(y)$ . La composée de deux bijections est une bijection et  $(h \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ h^{-1}$ . Pour  $f$  croissante (resp. décroissante) sur  $[a; b]$  :  $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$  (resp.  $[f(b); f(a)]$ ).  $E(x) = m \iff m \in \mathbb{Z}$  et  $m \leq x < m + 1$ .

### Exercice 1 — Injection, surjection, bijection

Pour  $x \neq 2$  :  $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 > 0$  et  $x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$ , donc  $f(x) = 1 - \frac{1}{(x - 2)^2}$ .

**1.a)**  $\frac{1}{(x - 2)^2} > 0$ , donc  $f(x) < 1$ .

**1.b)** Le réel 1 de l'ensemble d'arrivée  $\mathbb{R}$  n'a aucun antécédent (question 1.a) :  $f$  n'est **pas surjective**.

**2.a)**  $4 - x = 2 \iff x = 2$ ; donc si  $x \neq 2$ ,  $4 - x \neq 2$ . Et  $((4 - x) - 2)^2 = (2 - x)^2 = (x - 2)^2$ , d'où  $f(4 - x) = f(x)$ .

**2.b)** Avec  $x = 1$  :  $f(3) = f(1) = 0$  et  $1 \neq 3$  :  $f$  n'est **pas injective**.

**3.a)** Pour  $x > 2$ ,  $g(x) < 1$  :  $g$  est bien à valeurs dans  $] -\infty; 1[$ . Soit  $y < 1$ . Pour  $x > 2$  :

$$g(x) = y \iff \frac{1}{(x - 2)^2} = 1 - y \iff (x - 2)^2 = \frac{1}{1 - y} \iff x - 2 = \frac{1}{\sqrt{1 - y}},$$

la dernière équivalence venant de  $x - 2 > 0$  et  $1 - y > 0$ . L'équation a donc une **unique** solution  $x = 2 + \frac{1}{\sqrt{1 - y}}$ , qui appartient bien à  $]2; +\infty[$  :  $g$  est bijective.

**3.b)**  $g(3) = 1 - 1 = 0$  et  $3 > 2$  :  $g^{-1}(0) = 3$  (l'autre antécédent de 0 par  $f$ , à savoir 1, n'est pas dans  $]2; +\infty[$ ).

**3.c)** D'après 3.a :  $g^{-1} : ] -\infty; 1[ \rightarrow ]2; +\infty[$ ,  $y \mapsto 2 + \frac{1}{\sqrt{1 - y}}$ . (Contrôle :  $y = 0$  donne 3.)

### Exercice 2 — Bijection et composition

**1)** Pour  $x \in [-2; 0]$ ,  $x^2 \in [0; 4]$  :  $g$  est bien à valeurs dans  $[0; 4]$ . Soit  $y \in [0; 4]$  : pour  $x \in [-2; 0]$ ,  $x^2 = y \iff x = -\sqrt{y}$  (car  $x \leq 0$ ), et  $-\sqrt{y} \in [-2; 0]$ . L'antécédent existe et est unique :  $g$  est bijective,  $g^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ .

**2)** Pour  $t \in [0; 4]$  :  $h(t) \geq 0$  et  $\frac{4 - t}{5} - h(t) = \frac{4 - t}{5(t + 1)} \geq 0$ . Soit  $y \in [0; \frac{4}{5}]$  :  $\frac{t}{t + 1} = y \iff t = y(t + 1) \iff t(1 - y) = y \iff t = \frac{y}{1 - y}$  (car  $y \neq 1$ ). Or  $\frac{y}{1 - y} \geq 0$  et  $\frac{y}{1 - y} \leq 4 \iff y \leq 4 - 4y \iff y \leq \frac{4}{5}$ , vrai. Donc  $h$  est bijective et  $h^{-1}(y) = \frac{y}{1 - y}$ .

**3)**  $g([-2; 0]) = [0; 4]$  est l'ensemble de départ de  $h$ , et pour  $x \in [-2; 0]$  :  $(h \circ g)(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} = f(x)$ . Mêmes ensembles de départ et d'arrivée :  $f = h \circ g$ .

**4)**  $f$  est la composée de deux bijections, donc est bijective, et  $f^{-1} = g^{-1} \circ h^{-1}$  :

$$f^{-1} : [0; \frac{4}{5}] \rightarrow [-2; 0], \quad f^{-1}(y) = -\sqrt{\frac{y}{1 - y}}.$$

(Contrôle :  $y = \frac{4}{5}$  donne  $-\sqrt{4} = -2$  et  $f(-2) = \frac{4}{5}$ .)

### Exercice 3 — Application entre ensembles de parties

Pour  $X \subset E$ ,  $A \setminus X \subset A$  et  $B \setminus X \subset B$  :  $\varphi$  est bien définie.

1)  $\varphi(\emptyset) = (A; B)$ ;  $\varphi(A \cap B) = (A \setminus B; B \setminus A)$ ;  $\varphi(E) = (\emptyset; \emptyset)$ .

2) Soient  $X, X' \subset E$  tels que  $\varphi(X) = \varphi(X')$ , c'est-à-dire  $A \setminus X = A \setminus X'$  et  $B \setminus X = B \setminus X'$ . En passant aux compléments dans  $A$  (resp.  $B$ ) :  $A \cap X = A \cap X'$  et  $B \cap X = B \cap X'$ . Comme  $X \subset E = A \cup B$  :

$$X = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (X' \cap A) \cup (X' \cap B) = X'.$$

Donc  $\varphi$  est injective.

3) Soit  $(Y; Z) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ ; posons  $X = E \setminus (Y \cup Z)$ . Alors  $A \setminus X = A \cap (Y \cup Z) = (A \cap Y) \cup (A \cap Z) = Y \cup (A \cap Z)$ . Or  $Z \subset B$  et  $A \cap B = \emptyset$ , donc  $A \cap Z = \emptyset$  et  $A \setminus X = Y$ . De même  $B \setminus X = Z$ . Ainsi  $\varphi(X) = (Y; Z)$  :  $\varphi$  est surjective.

4) Sous ces hypothèses,  $\varphi$  est injective (2) et surjective (3), donc bijective, et l'unique antécédent trouvé en 3 donne  $\varphi^{-1}(Y; Z) = E \setminus (Y \cup Z)$ .

### Exercice 4 — Bijection et partie entière

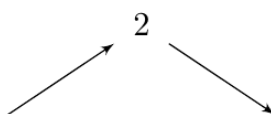
1) *Injectivité.* Si  $y = 2n + x$  avec  $n \in \mathbb{Z}$  et  $x \in [0; 2[$ , alors  $\frac{y}{2} = n + \frac{x}{2}$  avec  $0 \leq \frac{x}{2} < 1$ , donc  $E(\frac{y}{2}) = n$  et  $x = y - 2n$  : le couple  $(n; x)$  est déterminé par  $y$ . Ainsi  $f(n; x) = f(n'; x')$  entraîne  $n = n'$  puis  $x = x'$ . *Surjectivité.* Soit  $y \in \mathbb{R}$ ; posons  $n = E(\frac{y}{2}) \in \mathbb{Z}$  et  $x = y - 2n$ . De  $n \leq \frac{y}{2} < n + 1$  on tire  $0 \leq x < 2$ , et  $f(n; x) = y$ . Donc  $f$  est bijective.

2) D'après 1 :  $f^{-1}(y) = \left( E\left(\frac{y}{2}\right) ; y - 2E\left(\frac{y}{2}\right) \right)$ . (Exemple :  $f^{-1}(-3) = (-2; 1)$  car  $-4 + 1 = -3$ .)

### Exercice 5 — Problème

1)  $D_f = \mathbb{R}$ .  $f(1) = -7$  et  $f(-1) = 1$  :  $f(-1) \neq f(1)$  et  $f(-1) \neq -f(1)$ , donc  $f$  n'est ni paire ni impaire.

2.a)  $f(x) = -(x^2 + 4x + 4) + 2 = -(x + 2)^2 + 2$  :  $a = -1 < 0$ ,  $\alpha = -2$ ,  $\beta = 2$ .  $f$  est croissante sur  $]-\infty; -2]$ , décroissante sur  $[-2; +\infty[$ , de maximum 2.

| $x$    | $-\infty$                                                                                                                                        | $-2$ | $+\infty$ |
|--------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----------|
| $f(x)$ | <div style="text-align: center;"> <math>2</math><br/>  </div> |      |           |

2.b)  $D_g = [-2; +\infty[$ ;  $g$  est strictement croissante sur  $D_g$  (fonction  $x \mapsto \sqrt{x + a}$ ).

| $x$    | $-2$                                                                                                                                             | $+\infty$ |
|--------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| $g(x)$ | <div style="text-align: center;"> <math>0</math><br/>  </div> |           |

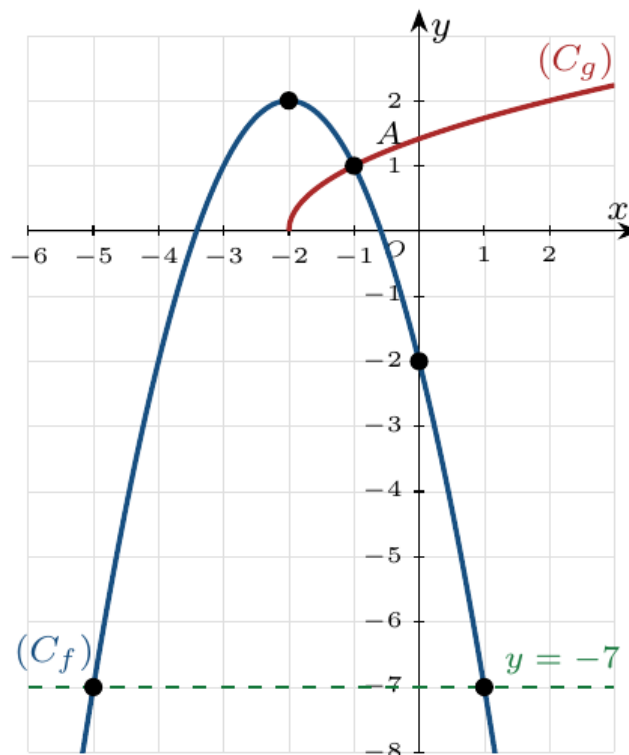
3)  $f(x) - f(y) = -(x^2 - y^2) - 4(x - y) = (x - y)(-x - y - 4)$ , d'où  $T = -x - y - 4$ .

4) Si  $x \neq y$  sont dans  $]-\infty; -2]$  :  $x + y < -4$ , donc  $T > 0$  :  $f$  strictement croissante. Si  $x \neq y$  sont dans  $[-2; +\infty[$  :  $x + y > -4$ ,  $T < 0$  :  $f$  strictement décroissante.

5.a)  $f(x) = 0 \iff (x+2)^2 = 2 \iff x = -2 - \sqrt{2}$  ou  $x = -2 + \sqrt{2}$  : points  $(-2 - \sqrt{2}; 0)$  et  $(-2 + \sqrt{2}; 0)$ .  
 $f(0) = -2$  : point  $(0; -2)$ .

5.b)  $f(-1) = -1 + 4 - 2 = 1$  et  $g(-1) = \sqrt{1} = 1$  :  $A \in (C_f) \cap (C_g)$ .

6)  $(C_f)$  est la parabole de sommet  $(-2; 2)$ , d'axe  $x = -2$ , tournée vers le bas.



7.a) La droite  $y = -7$  coupe  $(C_f)$  aux points d'abscisses  $-5$  et  $1$  :  $S = \{-5; 1\}$ .

7.b)  $f(x) = -7 \iff -x^2 - 4x + 5 = 0 \iff x^2 + 4x - 5 = 0 \iff (x-1)(x+5) = 0 \iff x \in \{-5; 1\}$ .

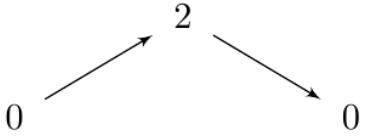
8) Pour  $x \geq -2$  :  $x^2 + 4x + 2 + \sqrt{x+2} = 0 \iff g(x) = f(x)$ . Sur  $[-2; +\infty[$ ,  $g$  est strictement croissante et  $f$  strictement décroissante, donc  $g - f$  est strictement croissante et s'annule au plus une fois ; d'après 5.b, elle s'annule en  $-1$ .  $S = \{-1\}$ .

9)  $f(x) > -7 \iff (x-1)(x+5) < 0 \iff x \in ]-5; 1[$  (graphiquement :  $(C_f)$  au-dessus de la droite  $y = -7$ ).

10) Pour  $x \geq -2$ , l'inéquation équivaut à  $g(x) < f(x)$ , soit  $(g-f)(x) < 0 = (g-f)(-1)$ . Comme  $g-f$  est strictement croissante sur  $[-2; +\infty[$  :  $S = [-2; -1[$ .

11) Graphiquement : sur  $[-3; -2]$ ,  $(C_f)$  monte de  $(-3; 1)$  à  $(-2; 2)$  ; sur  $[-2; 0]$ , elle descend de  $(-2; 2)$  à  $(0; -2)$ .  
 Algébriquement :  $x \in [-3; -2] \iff x+2 \in [-1; 0] \iff (x+2)^2 \in [0; 1]$  (le carré est décroissant sur  $\mathbb{R}_-$  et prend toutes les valeurs de  $[0; 1]$ ), donc  $f(x) = 2 - (x+2)^2$  décrit  $[1; 2]$ . De même  $x \in [-2; 0] \iff x+2 \in [0; 2]$ ,  $(x+2)^2$  décrit  $[0; 4]$  et  $f(x)$  décrit  $[-2; 2]$ . Donc  $f([-3; -2]) = [1; 2]$  et  $f([-2; 0]) = [-2; 2]$ .

12)  $h(x)$  existe  $\iff -x^2 - 4x \geq 0 \iff x(x+4) \leq 0 \iff x \in [-4; 0]$  :  $D_h = [-4; 0]$ . Pour  $x \in D_h$  :  $f(x) + 2 = -x^2 - 4x \geq 0$ , donc  $f(x) \in D_g$  et  $(g \circ f)(x) = \sqrt{f(x) + 2} = h(x)$ . Sur  $[-4; -2]$  :  $f$  est croissante et  $f([-4; -2]) = [-2; 2] \subset D_g$  où  $g$  est croissante :  $h$  est **croissante**. Sur  $[-2; 0]$  :  $f$  est décroissante,  $f([-2; 0]) = [-2; 2]$  :  $h$  est **décroissante**. Maximum  $h(-2) = 2$ .

|        |                                                                                                                                                |      |     |
|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| $x$    | $-4$                                                                                                                                           | $-2$ | $0$ |
| $h(x)$ |  <pre> graph TD     2 --&gt; 0L[0]     2 --&gt; 0R[0] </pre> |      |     |

**13)** Si  $x$  est solution,  $k = \frac{x+2}{4} \in \mathbb{Z}$  et  $x = 4k - 2$ . L'équation devient  $E\left(\frac{4k-3}{3}\right) = k \iff k \leq \frac{4k-3}{3} < k+1 \iff 3k \leq 4k-3 < 3k+3 \iff 3 \leq k < 6$ . Donc  $k \in \{3; 4; 5\}$  et réciproquement ces valeurs conviennent :  $S = \{10; 14; 18\}$ . (Contrôle :  $x = 14 : E\left(\frac{13}{3}\right) = 4 = \frac{16}{4}$ .)