

Corrigé du devoir maison n° 1

Notions de logique — Les ensembles

Exercice 1 — Quantificateurs, négation et loi logique

Question 1

a) Les trois propositions s'écrivent :

- $P_1 : (\forall (m; n) \in \mathbb{Z}^2) \ (m \text{ impair et } n \text{ impair}) \implies m + n \text{ pair} ;$
- $P_2 : (\forall x \in \mathbb{R}) \ (\exists n \in \mathbb{Z}) \ n \leq x < n + 1 ;$
- $P_3 : (\forall x \in \mathbb{Q}) \ x^2 \neq 5.$

b) *Étude de P_1 .* Soient m et n deux entiers relatifs impairs : il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $m = 2p + 1$ et $n = 2q + 1$. Alors $m + n = 2p + 2q + 2 = 2(p + q + 1)$ avec $p + q + 1 \in \mathbb{Z}$, donc $m + n$ est pair. Ainsi P_1 est **vraie**.

Négation : $\overline{P_1} : (\exists (m; n) \in \mathbb{Z}^2) \ m \text{ impair et } n \text{ impair et } m + n \text{ impair}.$

Étude de P_3 . Soit $x \in \mathbb{Q}$. L'égalité $x^2 = 5$ équivaut à $x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$. Or $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ (admis) et $-\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ (sinon $\sqrt{5} = -(-\sqrt{5})$ serait rationnel). Donc aucun rationnel n'a pour carré 5 : P_3 est **vraie**.

Négation : $\overline{P_3} : (\exists x \in \mathbb{Q}) \ x^2 = 5.$

Question 2

Notons T la proposition « $(P \Rightarrow Q)$ et $(P \Rightarrow \overline{Q})$ » et dressons la table de vérité.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow \overline{Q}$	T	$\overline{P}$	$T \Rightarrow \overline{P}$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V

La dernière colonne ne contient que des V : la proposition $T \Rightarrow \overline{P}$ est une **loi logique**. Elle justifie le **raisonnement par l'absurde** : pour démontrer $\overline{P}$, on suppose P et on en déduit une proposition Q et sa négation $\overline{Q}$.

Exercice 2 — Raisonnements direct, par contraposée, par équivalences, par l'absurde

Question 1

a) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $2\sqrt{a} \neq \sqrt{b}$. La contraposée de l'implication demandée est :

$$\frac{\sqrt{a} + 3\sqrt{b}}{2\sqrt{a} - \sqrt{b}} = 1 \implies \sqrt{a} = 4\sqrt{b}.$$

Supposons que le quotient vaille 1. Comme $2\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq 0$, on peut multiplier par ce nombre : $\sqrt{a} + 3\sqrt{b} = 2\sqrt{a} - \sqrt{b}$, donc $\sqrt{a} = 4\sqrt{b}$. La contraposée est vraie, donc l'implication l'est aussi.

b) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Comme $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (car $a, b \geq 0$) :

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0,$$

d'où $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

c) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. D'après b) appliquée successivement aux couples $(a; b)$, $(b; c)$ et $(c; a)$ de réels positifs :

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \quad \sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2}, \quad \sqrt{ca} \leq \frac{c+a}{2}.$$

En additionnant membre à membre : $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq \frac{2a + 2b + 2c}{2} = a + b + c$.

Question 2

Soient $x, y \in \mathbb{Q}^*$ tels que $x^3y + xy^3 = 6$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $x = y$. Alors $x^3y + xy^3 = 2x^4 = 6$, soit $(x^2)^2 = 3$. Comme $x^2 > 0$, on obtient $x^2 = \sqrt{3}$. Or $x \in \mathbb{Q}$ donc $x^2 \in \mathbb{Q}$, d'où $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$: c'est absurde, car $\sqrt{3}$ est irrationnel. Donc $x \neq y$.

Question 3

Soient $a, b, x, y \in \mathbb{R}^*$ tels que $ax + by = 2$. On a l'identité

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 = a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy = (ay - bx)^2 \geq 0.$$

Comme $ax + by = 2$, on obtient $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq 4$. Puisque $x^2 + y^2 > 0$, on divise par ce nombre : $a^2 + b^2 \geq \frac{4}{x^2 + y^2}$.

Question 4

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x| < 1$ et $|y| < 1$. Alors $|xy| = |x||y| < 1$, donc $xy < 1$ et $1 - xy > 0$. On a alors :

$$\left| \frac{x - y}{1 - xy} \right| < 1 \iff |x - y| < 1 - xy \iff (x - y)^2 < (1 - xy)^2 \iff 0 < (1 - xy)^2 - (x - y)^2.$$

La première équivalence vient de $|1 - xy| = 1 - xy > 0$; la deuxième de ce que $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (les deux membres sont positifs). Or

$$(1 - xy)^2 - (x - y)^2 = 1 - x^2 - y^2 + x^2y^2 = (1 - x^2)(1 - y^2) > 0,$$

car $1 - x^2 > 0$ et $1 - y^2 > 0$. La dernière proposition est vraie, donc la première aussi.

Question 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Raisonnons par l'absurde : supposons que $\sqrt{n^2 + 1}$ soit un entier naturel, noté m . Alors $m^2 = n^2 + 1$.

- Comme $m^2 = n^2 + 1 > n^2$ et que m et n sont positifs, on a $m > n$; l'entier m vérifie donc $m \geq n + 1$.
- Par croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit $m^2 \geq (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$.
- Or $n^2 + 2n + 1 - (n^2 + 1) = 2n > 0$ car $n \geq 1$: donc $(n + 1)^2 > n^2 + 1 = m^2$, ce qui contredit $m^2 \geq (n + 1)^2$.

Cette contradiction montre que $\sqrt{n^2 + 1} \notin \mathbb{N}$. (Autrement dit, $n^2 < n^2 + 1 < (n + 1)^2$: le nombre $n^2 + 1$ est strictement compris entre deux carrés parfaits consécutifs, donc ce n'est pas un carré parfait.)

b) Raisonnons par l'absurde : supposons que $\sqrt{n^2 + 1} \in \mathbb{Q}$. Comme $\sqrt{n^2 + 1} > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\sqrt{n^2 + 1} = \frac{p}{q} \quad \text{avec } \text{PGCD}(p; q) = 1 \quad (\text{fraction irréductible}).$$

- En élevant au carré : $\frac{p^2}{q^2} = n^2 + 1$, donc $p^2 = q^2(n^2 + 1)$.
- Cette égalité montre que q divise p^2 (car $p^2 = q \times (q(n^2 + 1))$ avec $q(n^2 + 1) \in \mathbb{N}$).
- Supposons $q \geq 2$ et soit ℓ un nombre premier qui divise q . Comme q divise $p^2 = p \times p$, le nombre premier ℓ divise $p \times p$, donc divise p (lemme d'Euclide). Alors ℓ divise à la fois p et q , ce qui contredit $\text{PGCD}(p; q) = 1$. Donc $q = 1$.
- Avec $q = 1$: $\sqrt{n^2 + 1} = p \in \mathbb{N}$. Cela contredit le résultat de la question a).

Cette contradiction montre que $\sqrt{n^2 + 1} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3 — Récurrence et disjonction des cas

Question 1

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $P(n) : \sum_{k=1}^n k 2^k = (n-1) 2^{n+1} + 2$.

— *Initialisation* : pour $n = 1$, le membre de gauche vaut $1 \times 2 = 2$ et le membre de droite $(1-1) 2^2 + 2 = 2$: $P(1)$ est vraie.

— *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k 2^k = \sum_{k=1}^n k 2^k + (n+1) 2^{n+1} = (n-1) 2^{n+1} + 2 + (n+1) 2^{n+1} = 2n \cdot 2^{n+1} + 2 = ((n+1)-1) 2^{n+2} + 2,$$

ce qui est $P(n+1)$.

— *Conclusion* : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sum_{k=1}^n k 2^k = (n-1) 2^{n+1} + 2$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $Q(n) : \ll 6 \text{ divise } n^3 + 5n \gg$.

— *Initialisation* : $0^3 + 5 \times 0 = 0 = 6 \times 0$: $Q(0)$ est vraie.

— *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q(n)$ est vraie : il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $n^3 + 5n = 6q$. Alors

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = (n^3 + 5n) + 3n(n+1) + 6.$$

Or $n(n+1)$ est le produit de deux entiers consécutifs, donc il est pair : $n(n+1) = 2r$ avec $r \in \mathbb{N}$. Ainsi $(n+1)^3 + 5(n+1) = 6q + 6r + 6 = 6(q+r+1)$ avec $q+r+1 \in \mathbb{Z}$: $Q(n+1)$ est vraie.

— *Conclusion* : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ 6 \text{ divise } n^3 + 5n$.

Question 2

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3|$. Les valeurs 1, 2 et 3 annulent les valeurs absolues ; on distingue donc quatre cas qui recouvrent $\mathbb{R}$.

x	$x \leq 1$	$1 \leq x \leq 2$	$2 \leq x \leq 3$	$x \geq 3$
$f(x)$	$6-3x$	$4-x$	x	$3x-6$

Cas 1 : $x \leq 1$. Les trois quantités $x-1$, $x-2$, $x-3$ sont négatives, donc $f(x) = (1-x) + (2-x) + (3-x) = 6-3x$. Comme $x \leq 1$, $-3x \geq -3$ et $f(x) \geq 3 \geq 2$.

Cas 2 : $1 \leq x \leq 2$. Alors $x-1 \geq 0$, $x-2 \leq 0$, $x-3 < 0$ et $f(x) = (x-1) + (2-x) + (3-x) = 4-x$. Comme $x \leq 2$, $f(x) \geq 4-2 = 2$.

Cas 3 : $2 \leq x \leq 3$. Alors $x-1 > 0$, $x-2 \geq 0$, $x-3 \leq 0$ et $f(x) = (x-1) + (x-2) + (3-x) = x \geq 2$.

Cas 4 : $x \geq 3$. Les trois quantités sont positives et $f(x) = (x-1) + (x-2) + (x-3) = 3x-6$. Comme $x \geq 3$, $f(x) \geq 3 \geq 2$.

Conclusion : dans chacun des quatre cas $f(x) \geq 2$, donc $(\forall x \in \mathbb{R}) \ |x-1| + |x-2| + |x-3| \geq 2$.

Cas d'égalité. Reprenons chaque cas.

— Cas 1 et cas 4 : on a montré $f(x) \geq 3 > 2$; l'égalité $f(x) = 2$ est impossible.

— Cas 2 : $f(x) = 2 \iff 4-x = 2 \iff x = 2$, et $2 \in [1; 2]$ convient.

— Cas 3 : $f(x) = 2 \iff x = 2$, et $2 \in [2; 3]$ convient.

L'égalité est donc atteinte **si et seulement si** $x = 2$ (vérification : $f(2) = 1 + 0 + 1 = 2$).

Question 3

On résout dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x^2 + x - 6} \geq 2x - 3$.

Domaine de définition. L'expression a un sens si et seulement si $x^2 + x - 6 \geq 0$. Or $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$, qui est positif ou nul si et seulement si $x \leq -3$ ou $x \geq 2$. Le domaine est donc $D =]-\infty; -3] \cup [2; +\infty[$ et l'on résout dans D .

Cas 1 : $x \in D$ et $2x - 3 < 0$. Dans D , $2x - 3 < 0$ équivaut à $x \leq -3$ (si $x \geq 2$ alors $2x - 3 \geq 1 > 0$). Le membre de gauche est positif ou nul et le membre de droite est strictement négatif : l'inéquation est vraie pour tout $x \leq -3$. Ce cas fournit $] - \infty; -3]$.

Cas 2 : $x \in D$ et $2x - 3 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq 2$. Les deux membres sont positifs et la fonction $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc

$$\sqrt{x^2 + x - 6} \geq 2x - 3 \iff x^2 + x - 6 \geq (2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9 \iff 3x^2 - 13x + 15 \leq 0.$$

Le discriminant du trinôme $3x^2 - 13x + 15$ est $\Delta = 13^2 - 4 \times 3 \times 15 = 169 - 180 = -11 < 0$ et son coefficient dominant est positif : $3x^2 - 13x + 15 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (On le voit aussi avec la forme canonique $3x^2 - 13x + 15 = 3\left(x - \frac{13}{6}\right)^2 + \frac{11}{12} > 0$.) L'inégalité $3x^2 - 13x + 15 \leq 0$ n'est jamais vérifiée : ce cas ne fournit aucune solution.

Conclusion : l'ensemble des solutions est

$$S =] - \infty; -3].$$

Exercice 4 — Écriture et égalité d'ensembles

Question 1

Ensemble A. Soit $x \in \mathbb{N}$. On a $\frac{3x+8}{x+1} = 3 + \frac{5}{x+1}$. Ce nombre est un entier naturel si et seulement si $\frac{5}{x+1} \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire si $x+1$ divise 5. Les diviseurs positifs de 5 sont 1 et 5, donc $x+1 \in \{1; 5\}$ et $x \in \{0; 4\}$. Réciproquement, $x = 0$ donne $8 \in \mathbb{N}$ et $x = 4$ donne $\frac{20}{5} = 4 \in \mathbb{N}$. Donc $A = \{0; 4\}$.

Ensemble B. Soit $x \in \mathbb{N}$. On a $x^2 + x + 3 = (x+2)(x-1) + 5$, donc $\frac{x^2+x+3}{x+2} = x-1 + \frac{5}{x+2}$. Comme $x-1 \in \mathbb{Z}$, ce nombre est un entier relatif si et seulement si $x+2$ divise 5. Or $x+2 \geq 2$ et les diviseurs positifs de 5 sont 1 et 5 : $x+2 = 5$, soit $x = 3$. Réciproquement, $x = 3$ donne $\frac{15}{5} = 3 \in \mathbb{Z}$. Donc $B = \{3\}$.

Ensemble C. Soit $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$. Posons $u = x + y$ et $v = 2x - y$; ce sont des entiers et $uv = 5$. Réciproquement $u + v = 3x$ et $2u - v = 3y$, donc $x = \frac{u+v}{3}$ et $y = \frac{2u-v}{3}$. Les couples d'entiers $(u; v)$ de produit 5 sont $(1; 5)$, $(5; 1)$, $(-1; -5)$ et $(-5; -1)$. On en déduit :

$(u; v)$	$(1; 5)$	$(5; 1)$	$(-1; -5)$	$(-5; -1)$
$(x; y)$	$(2; -1)$	$(2; 3)$	$(-2; 1)$	$(-2; -3)$

Les quatre couples obtenus sont bien dans $\mathbb{Z}^2$ et vérifient $(x+y)(2x-y) = 5$. Donc $C = \{(2; -1); (2; 3); (-2; 1); (-2; -3)\}$.

Question 2

Soient A , B et C des parties d'un ensemble E .

a) Pour tout $x \in E$: $x \in (A \cup B) \setminus C \iff (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } x \notin C \iff (x \in A \text{ et } x \notin C) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin C) \iff x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ (distributivité de « et » sur « ou »). Donc $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

b) On a $A \setminus C = A \cap \overline{C}$ et $B \setminus C = B \cap \overline{C}$, donc

$$(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = A \cap \overline{C} \cap B \cap \overline{C} = (A \cap B) \cap \overline{C} = (A \cap B) \setminus C.$$

c) ($\Leftarrow$) Si $B = C$, alors évidemment $A \cup B = A \cup C$ et $A \setminus B = A \setminus C$.

($\Rightarrow$) Supposons $A \cup B = A \cup C$ et $A \setminus B = A \setminus C$.

- De $A \cup B = A \cup C : B \setminus A = (A \cup B) \setminus A = (A \cup C) \setminus A = C \setminus A$.
- De $A \setminus B = A \setminus C : A \cap B = A \setminus (A \setminus B) = A \setminus (A \setminus C) = A \cap C$.
- Or $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ et $C = (C \setminus A) \cup (A \cap C)$. Donc $B = (C \setminus A) \cup (A \cap C) = C$.

Dans les questions d) à g), $\overline{X}$ désigne le complémentaire de X dans E . Les raisonnements se font sur un élément quelconque $x \in E$, en traduisant chaque ensemble par une condition sur x .

d) Soit $x \in E$. On a

$$x \in \overline{A \setminus B} \iff x \notin A \setminus B \iff \overline{(x \in A \text{ et } x \notin B)} \iff (x \notin A \text{ ou } x \in B) \iff x \in \overline{A} \cup B.$$

(La troisième équivalence est la négation d'une conjonction.) Donc $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B$.

e) Soit $x \in E$. On a

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \setminus C) &\iff x \in A \text{ et } \overline{(x \in B \text{ et } x \notin C)} \\ &\iff x \in A \text{ et } (x \notin B \text{ ou } x \in C) \\ &\iff (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C) \\ &\iff x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Donc $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

f) Soit $x \in E$; notons p la proposition « $x \in A$ » et q la proposition « $x \in B$ ». Par définition, $x \in A \Delta B$ si et seulement si x appartient à exactement un des deux ensembles, c'est-à-dire si $(p \text{ et } \overline{q})$ ou $(\overline{p} \text{ et } q)$.

— Complémentaire de $A \Delta B$. Par négation d'une disjonction puis d'une conjonction :

$$x \in \overline{A \Delta B} \iff \overline{(p \text{ et } \overline{q}) \text{ et } (\overline{p} \text{ et } q)} \iff (\overline{p \text{ et } \overline{q}}) \text{ et } (\overline{\overline{p} \text{ et } q}) \iff (\overline{p} \text{ ou } q) \text{ et } (p \text{ ou } \overline{q}).$$

En distribuant « et » sur « ou », cela équivaut à : $(\overline{p} \text{ et } p) \text{ ou } (\overline{p} \text{ et } q) \text{ ou } (q \text{ et } p) \text{ ou } (q \text{ et } \overline{q})$. Les propositions « $\overline{p} \text{ et } p$ » et « $q \text{ et } \overline{q}$ » sont fausses, d'où

$$x \in \overline{A \Delta B} \iff (p \text{ et } q) \text{ ou } (\overline{p} \text{ et } \overline{q}) \iff x \in (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}).$$

— L'ensemble $\overline{A \Delta B}$. On remplace A par $\overline{A}$ dans la définition : $x \in \overline{A \Delta B}$ si et seulement si $(x \in \overline{A} \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \notin \overline{A} \text{ et } x \in B)$, c'est-à-dire $(\overline{p} \text{ et } \overline{q}) \text{ ou } (p \text{ et } q)$, soit $x \in (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$.

Les trois ensembles $\overline{A \Delta B}$, $\overline{A \Delta B}$ et $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ sont définis par la même condition sur x : ils sont égaux.

g) Supposons $A \cap B = A \cap C$ et $\overline{A} \cap B = \overline{A} \cap C$. Comme $A \cup \overline{A} = E$ et $B \subset E$:

$$B = B \cap E = B \cap (A \cup \overline{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cap C) \cup (\overline{A} \cap C) = C \cap (A \cup \overline{A}) = C \cap E = C.$$

Donc $B = C$.

Question 3

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On a

$$\frac{2x-1}{x-1} > 2 \iff \frac{2x-1}{x-1} - 2 > 0 \iff \frac{2x-1-2(x-1)}{x-1} > 0 \iff \frac{1}{x-1} > 0 \iff x-1 > 0 \iff x > 1.$$

Donc $B = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} / x > 1\} =]1; +\infty[= A$.

Question 4

- $A \subset B$: soit $M \in A : M = (x; \sqrt{2x-4})$ avec $x \in [2; +\infty[$. Posons $t = \sqrt{2x-4}$; alors $t \in \mathbb{R}_+$ et $t^2 = 2x-4$, donc $x = \frac{t^2+4}{2}$. Ainsi $M = \left(\frac{t^2+4}{2}; t\right)$ avec $t \in \mathbb{R}_+$, donc $M \in B$.
- $B \subset A$: soit $M \in B : M = \left(\frac{t^2+4}{2}; t\right)$ avec $t \in \mathbb{R}_+$. Posons $x = \frac{t^2+4}{2}$; alors $x \geq 2$, donc $x \in [2; +\infty[$, et $2x-4 = t^2$, d'où $\sqrt{2x-4} = \sqrt{t^2} = |t| = t$ car $t \geq 0$. Ainsi $M = (x; \sqrt{2x-4})$ avec $x \in [2; +\infty[$, donc $M \in A$.

On a $A \subset B$ et $B \subset A : A = B$.

Exercice 5 — Raisonnement par l'absurde et problème de synthèse

Question 1

Raisonnons par l'absurde. Supposons que $A \cap B \neq \emptyset$: il existe $x \in A \cap B$, donc il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{7} = \frac{\pi}{2} + \frac{2k'\pi}{7}.$$

En multipliant les deux membres par $\frac{42}{\pi}$: $14 + 12k = 21 + 12k'$, soit $12(k - k') = 7$. Le membre de gauche est un entier pair alors que 7 est impair : c'est absurde. Donc $A \cap B = \emptyset$.

Question 2

a) Soient X et Y deux parties de E . Montrons que $X \cup Y = (X \Delta Y) \cup (X \cap Y)$.

- Soit $x \in X \cup Y$. Ou bien x appartient à un seul des deux ensembles, et alors $x \in X \Delta Y$; ou bien il appartient aux deux, et alors $x \in X \cap Y$. Donc $X \cup Y \subset (X \Delta Y) \cup (X \cap Y)$.
- Réciproquement $X \Delta Y \subset X \cup Y$ et $X \cap Y \subset X \cup Y$, donc $(X \Delta Y) \cup (X \cap Y) \subset X \cup Y$.

La réunion est disjointe : un élément de $X \Delta Y$ appartient à un seul des deux ensembles, un élément de $X \cap Y$ appartient aux deux ; donc $(X \Delta Y) \cap (X \cap Y) = \emptyset$. Par conséquent, $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{1; 2; 3; 5; 7\} \setminus \{3; 5\} = \{1; 2; 7\}$.

b) Raisonnons par l'absurde : supposons que $7 \notin B$. Comme $7 \in A \cup B$, on a $7 \in A$, donc $7 \in A \setminus B$: cela contredit $7 \notin A \setminus B$. Donc $7 \in B$. De plus $7 \notin \{3; 5\} = A \cap B$ et $7 \in B$, donc $7 \notin A$: ainsi $7 \in B \setminus A$. Comme $2 \in B \setminus A$ par hypothèse, on a $\{2; 7\} \subset B \setminus A$.

c) On a $1 \in A \cup B$ et $1 \notin B$, donc $1 \in A$ et $1 \in A \setminus B$. D'autre part $A \setminus B \subset A \Delta B = \{1; 2; 7\}$ et $2, 7 \in B$ (donc $2, 7 \notin A \setminus B$) : on obtient $A \setminus B = \{1\}$. Puis $B \setminus A = (A \Delta B) \setminus (A \setminus B) = \{1; 2; 7\} \setminus \{1\} = \{2; 7\}$.

d) On a $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) = \{1; 3; 5\}$ et $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B) = \{2; 3; 5; 7\}$. Soit X une partie de $A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 7\}$. Alors $X \cap A = A \cap B = \{3; 5\}$ si et seulement si $3 \in X$, $5 \in X$ et $1 \notin X$; les éléments 2 et 7 (qui ne sont pas dans A) peuvent appartenir ou non à X , sans condition. Donc $X = \{3; 5\} \cup Y$ avec $Y \subset \{2; 7\}$, et réciproquement tous ces ensembles conviennent. Il y a $2^2 = 4$ telles parties : $\{3; 5\}$, $\{2; 3; 5\}$, $\{3; 5; 7\}$, $\{2; 3; 5; 7\}$.