

Cours — Chapitre 17

Produit scalaire dans l'espace

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Produit scalaire dans l'espace et applications — II. Plan défini par un point et un vecteur normal, distances — III. Étude analytique d'une sphère — IV. Produit vectoriel — Résumé.

Prérequis. Produit scalaire dans le plan, analytique de l'espace (Ch. 16). Sauf mention contraire, l'espace est rapporté à un repère **orthonormé** $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

I. Produit scalaire dans l'espace

1) Définition

Définition 1
Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Les points A, B, C appartiennent à un même plan (P) ; le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ calculé dans (P) : $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ (si $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$), et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ sinon. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \ \vec{u}\ ^2$.

2) Propriétés et expression analytique

Propriété 1
Le produit scalaire est symétrique et bilinéaire. $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$, $\ \vec{u}\ = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.
Exemple 1
$\vec{u}(1; 2; -1), \vec{v}(3; -1; 1) : \vec{u} \cdot \vec{v} = 3 - 2 - 1 = 0$, donc $\vec{u} \perp \vec{v}$.

3) Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Propriété 2
Si $A \neq B$, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$.

II. Vecteur normal à un plan — distances

1) Vecteur normal

Définition 2
Un vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$ est normal au plan (P) s'il est orthogonal à deux vecteurs directeurs (non colinéaires) de (P) . Une droite est orthogonale à (P) si elle est dirigée par un vecteur normal à (P) .
Théorème 1
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}$. Le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ admet $\vec{n}(a; b; c)$ pour vecteur normal.
Propriété 3
Soient (P) et (P') de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$: $(P) \perp (P') \iff \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$; $(P) \parallel (P') \iff \vec{n}, \vec{n}'$ colinéaires. Le plan médiateur de $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de A et B : il passe par le milieu de $[AB]$ et admet $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal.

2) Distance d'un point à un plan

Théorème 2

La distance du point $A(x_A; y_A; z_A)$ au plan $(P) : ax + by + cz + d = 0$ est $d(A; (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$; elle est atteinte au **projeté orthogonal** H de A sur (P) .

Exemple 2

$$d(O; 2x - y + 2z - 6 = 0) = \frac{|-6|}{\sqrt{9}} = 2.$$

III. Étude analytique d'une sphère

1) Équation cartésienne

Définition 3

La **sphère** $S(\Omega; R)$ de centre $\Omega(a; b; c)$ et de rayon $R > 0$ est l'ensemble des points M tels que $\Omega M = R$. Une équation est $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

Propriété 4

L'ensemble (S) des points $M(x; y; z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ s'écrit $(x + \frac{\alpha}{2})^2 + (y + \frac{\beta}{2})^2 + (z + \frac{\gamma}{2})^2 = k$ avec $k = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4} - \delta$: si $k > 0$, (S) est la sphère de centre $\Omega(-\frac{\alpha}{2}; -\frac{\beta}{2}; -\frac{\gamma}{2})$ et de rayon $\sqrt{k}$; si $k = 0$, $(S) = \{\Omega\}$; si $k < 0$, $(S) = \emptyset$.

2) Positions relatives

Propriété 5

Soient $S(\Omega; R)$, (P) un plan, $d = d(\Omega; (P))$ et H le projeté orthogonal de Ω sur (P) . Si $d > R$: $(S) \cap (P) = \emptyset$. Si $d = R$: (P) est **tangent** à (S) en H . Si $d < R$: $(S) \cap (P)$ est le **cercle** de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. De même, une droite (D) coupe (S) en 0, 1 ou 2 points selon que $d(\Omega; (D)) > R, = R$ ou $< R$.

Propriété 6

Le plan tangent à $S(\Omega; R)$ en $A \in (S)$ est le plan passant par A de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega A}$.

IV. Produit vectoriel

1) Définition

Définition 4

L'espace est orienté (règle du bonhomme d'Ampère) et le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est orthonormé direct. Le **produit vectoriel** de $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ est le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ nul si $\vec{u}, \vec{v}$ sont colinéaires et, sinon, orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tel que $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u} \wedge \vec{v})$ soit direct et $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \widehat{AOB}$.

2) Propriétés (admises) et coordonnées

Propriété 7

$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$; le produit vectoriel est bilinéaire; $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u}, \vec{v}$ colinéaires. Si $\vec{u}(x; y; z), \vec{v}(x'; y'; z') :$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}.$$

3) Applications

Propriété 8

- A, B, C sont alignés $\iff \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$; sinon $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est **normal** au plan (ABC) .
- Aire du triangle ABC : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.
- Distance d'un point M à la droite $D(A; \vec{u})$: $d(M; D) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

Exemple 3

$A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1)$: $\overrightarrow{AB}(-1; 1; 0), \overrightarrow{AC}(-1; 0; 1), \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1; 1; 1)$; (ABC) : $x + y + z - 1 = 0$ et $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Résumé

À retenir

$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$; $ax + by + cz + d = 0$ a pour normal $(a; b; c)$; $d(A; P) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$; sphère : compléter les carrés, comparer $d(\Omega; P)$ à R ; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ normal à (ABC) , aire = $\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.