

Cours — Chapitre 16

Analytique de l'espace

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques

·

Lycée Qualifiant Ibn Hazm

·

Prof. El Koudri Hamza

·

2026–2027

Plan du chapitre. I. Coordonnées d'un point, coordonnées d'un vecteur — II. Colinéarité de deux vecteurs — III. Coplanarité de trois vecteurs (déterminant) — IV. Étude analytique d'une droite — V. Étude analytique d'un plan — VI. Positions relatives — Résumé.

Prérequis. Vecteurs de l'espace (Ch. 15), droites du plan, systèmes linéaires. Dans tout le chapitre, l'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ (non nécessairement orthonormé).

I. Coordonnées d'un point — coordonnées d'un vecteur

1) Base et repère

Définition 1

Trois vecteurs non coplanaires $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ forment une **base** de l'ensemble $\mathcal{V}_3$ des vecteurs de l'espace ; avec un point O , ils forment un **repère** $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un **unique** triplet $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$: ce sont les coordonnées de $\vec{u}$. Les coordonnées d'un point M sont celles de $\overrightarrow{OM}$.

2) Règles de calcul

Propriété 1

Soient $\vec{u}(x; y; z)$, $\vec{v}(x'; y'; z')$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$.
— $\vec{u} + \vec{v}(x + x'; y + y'; z + z')$, $\alpha\vec{u}(\alpha x; \alpha y; \alpha z)$; $\vec{u} = \vec{v} \iff x = x', y = y' \text{ et } z = z'$.
— $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$; le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Exemple 1

$A(1; 0; 2)$, $B(3; -2; 4)$: $\overrightarrow{AB}(2; -2; 2)$ et le milieu de $[AB]$ est $I(2; -1; 3)$.

II. Colinéarité de deux vecteurs

Définition 2

Les **déterminants extraits** de $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ sont $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$, où $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Propriété 2

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\iff$ leurs trois déterminants extraits sont nuls. En conséquence, A, B, C sont alignés $\iff$ les déterminants extraits de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont tous nuls.

Exemple 2

$\vec{u}(2; -1; 3)$ et $\vec{v}(-4; 2; -6)$: les trois déterminants valent $2 \times 2 - (-1)(-4) = 0$, $2(-6) - 3(-4) = 0$, $(-1)(-6) - 3 \times 2 = 0$; ils sont colinéaires ($\vec{v} = -2\vec{u}$).

III. Coplanarité de trois vecteurs

Définition 3

Le **déterminant** de $\vec{u}(x; y; z)$, $\vec{v}(x'; y'; z')$, $\vec{w}(x''; y''; z'')$ est

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}.$$

Propriété 3

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires $\iff \det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = 0$. Quatre points A, B, C, D sont coplanaires $\iff \det(\vec{AB}; \vec{AC}; \vec{AD}) = 0$. Trois vecteurs forment une base $\iff$ leur déterminant est non nul.

Exemple 3

Pour $\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{i} + \vec{k}$: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1 - 0) - 1(0 - 1) + 0 = 2 \neq 0$: ces trois vecteurs forment une base.

IV. Étude analytique d'une droite**1) Représentation paramétrique****Propriété 4**

La droite $D(A; \vec{u})$, avec $A(x_A; y_A; z_A)$ et $\vec{u}(a; b; c) \neq \vec{0}$, a pour **représentation paramétrique** $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$ ($t \in \mathbb{R}$).

2) Équations cartésiennes d'une droite**Propriété 5**

En éliminant t : si $abc \neq 0$, $D : \frac{x-x_A}{a} = \frac{y-y_A}{b} = \frac{z-z_A}{c}$; si $c = 0$ et $ab \neq 0$, $D : \frac{x-x_A}{a} = \frac{y-y_A}{b}$ et $z = z_A$; si $a = b = 0$, $D : x = x_A$ et $y = y_A$. Une droite est toujours définie par **deux** équations cartésiennes (intersection de deux plans).

Exemple 4

La droite passant par $A(1; 0; -2)$ dirigée par $\vec{u}(2; -1; 3)$: $x = 1 + 2t$, $y = -t$, $z = -2 + 3t$ ($t \in \mathbb{R}$), soit $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3}$.

V. Étude analytique d'un plan**1) Représentation paramétrique****Propriété 6**

Le plan $P(A; \vec{u}; \vec{v})$, avec $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$ non colinéaires, a pour représentation paramétrique $x = x_A + a\alpha + a'\beta$, $y = y_A + b\alpha + b'\beta$, $z = z_A + c\alpha + c'\beta$ ($(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$).

2) Équation cartésienne

Théorème 1

$M(x; y; z) \in P(A; \vec{u}; \vec{v}) \iff \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}; \vec{v}) = 0$. En développant, tout plan a une équation de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ avec $(\alpha; \beta; \gamma) \neq (0; 0; 0)$; réciproquement, une telle équation définit un plan. Le vecteur $\vec{w}(p; q; r)$ est un vecteur **du plan** (directeur) $\iff \alpha p + \beta q + \gamma r = 0$.

Exemple 5

Plan passant par $A(1; 0; 0)$ dirigé par $\vec{u}(1; 1; 0)$ et $\vec{v}(0; 1; 1)$:
$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & 1 & 1 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-1) - y + z = 0, \text{ soit } x - y + z - 1 = 0.$$

VI. Positions relatives

1) Deux droites

Propriété 7

Soient $D(A; \vec{u})$ et $D'(B; \vec{v})$. Si $\vec{u}, \vec{v}$ colinéaires : D et D' sont **confondues** si $A \in D'$, **strictement parallèles** sinon. Si $\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaires : elles sont **sécantes** si $\det(\overrightarrow{AB}; \vec{u}; \vec{v}) = 0$, **non coplanaires** sinon.

2) Une droite et un plan

Propriété 8

Soient $D(A; \vec{u})$ et $P(B; \vec{v}; \vec{w})$. Si $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \neq 0$, D et P sont **sécants en un point**; si $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = 0$, D est parallèle à P : $D \subset P$ si $A \in P$, $D \cap P = \emptyset$ sinon. Avec une équation $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ de P : $D \parallel P \iff \alpha a + \beta b + \gamma c = 0$.

3) Deux plans

Propriété 9

$P : ax + by + cz + d = 0$ et $P' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$. Si $(a; b; c)$ et $(a'; b'; c')$ sont proportionnels, P et P' sont **parallèles** (confondus si $(a; b; c; d)$ et $(a'; b'; c'; d')$ sont proportionnels, strictement parallèles sinon); sinon ils sont **sécants suivant une droite**.

Méthode

Pour l'intersection d'une droite (paramétrée) et d'un plan (équation cartésienne), on remplace x, y, z par leurs expressions en t : on obtient une équation du premier degré en t . Pour l'intersection de deux plans sécants, on exprime deux inconnues en fonction de la troisième, prise comme paramètre.

Résumé

À retenir

Colinéarité : déterminants extraits nuls. Coplanarité : $\det = 0$. Droite : 1 paramètre ou 2 équations. Plan : 2 paramètres ou 1 équation $ax + by + cz + d = 0$. Positions relatives : par colinéarité des vecteurs directeurs et calcul de déterminants.