

Cours — Chapitre 15

Vecteurs de l'espace

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Le vecteur dans l'espace — II. Vecteurs colinéaires, points alignés — III. Vecteurs coplanaires, points coplanaires — Résumé.

Prérequis. Vecteurs du plan, relation de Chasles, translation. **Convention pour un cube** $ABCDEFGH$: $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes.

I. Le vecteur dans l'espace

1) Rappels : solides usuels et perspective cavalière

Remarque

Cube (6 faces, 8 sommets), pavé droit (6 faces, 8 sommets), tétraèdre (4 faces, 4 sommets), prisme droit à base triangulaire (5 faces, 6 sommets), pyramide à base quadrilatère (5 faces, 5 sommets). En perspective cavalière, la face avant est en vraie grandeur, des arêtes parallèles sont représentées par des segments parallèles et les arêtes cachées sont en pointillés.

2) Définition et égalité de deux vecteurs

Définition 1

Deux points A et B de l'espace définissent le vecteur $\overrightarrow{AB}$, caractérisé (si $A \neq B$) par sa **direction** (celle de la droite (AB)), son **sens** (de A vers B) et sa **norme** $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$. Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le **vecteur nul** $\vec{0}$.

Propriété 1

Pour tous points A, B, C, D de l'espace : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati) $\iff [AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu. Pour tout point O et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un **unique** point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

3) Opérations

Propriété 2

Les règles de calcul du plan s'étendent à l'espace : **relation de Chasles** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; **règle du parallélogramme** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \iff ABDC$ parallélogramme; pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$, $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$, $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$; $\alpha\vec{u} = \vec{0} \iff (\alpha = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0})$. I est le milieu de $[AB] \iff \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \iff$ pour tout point M , $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Exemple 1

Dans le cube $ABCDEFGH$: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$ (Chasles et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$).

II. Vecteurs colinéaires — Points alignés

1) Définition

Définition 2

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si $\vec{u} = \vec{0}$ ou s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

2) Propriétés

Propriété 3

- Trois points A, B, C sont **alignés** $\iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** $\iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Si A est un point et $\vec{u} \neq \vec{0}$, la droite $D(A; \vec{u})$ passant par A et dirigée par $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$.

Exemple 2

Dans un tétraèdre $ABCD$, soient I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$. Alors $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$: les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

III. Vecteurs coplanaires — Points coplanaires

1) Plan défini par un point et deux vecteurs

Définition 3

Soient A un point et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs **non colinéaires**. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$, $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, est un plan noté $P(A; \vec{u}; \vec{v})$; on dit que $(\vec{u}; \vec{v})$ est un **couple de vecteurs directeurs** de ce plan. Si A, B, C ne sont pas alignés, $(ABC) = P(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

2) Vecteurs coplanaires

Définition 4

Trois vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{OA}, \vec{v} = \overrightarrow{OB}, \vec{w} = \overrightarrow{OC}$ sont **coplanaires** si les points O, A, B, C appartiennent à un même plan.

Propriété 4

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires $\iff$ il existe $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
Quatre points A, B, C, D sont coplanaires $\iff \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Exemple 3

Dans le cube $ABCDEFGH$: $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$, donc $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AG}$ sont coplanaires : A, C, E, G sont coplanaires (plan $(ACGE)$). En revanche $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires.

3) Parallélisme droite–plan et plan–plan

Propriété 5

- Une droite $D(A; \vec{w})$ est **parallèle** au plan $P(B; \vec{u}; \vec{v})$ $\iff \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires.
- Deux plans $P(A; \vec{u}; \vec{v})$ et $P(B; \vec{u}'; \vec{v}')$ sont **parallèles** $\iff \vec{u}'$ et $\vec{v}'$ sont chacun combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Méthode

Montrer que trois points sont alignés : exprimer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans une même base (par exemple $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$) puis exhiber k avec $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. **Montrer que quatre points sont coplanaires** : écrire l'un des vecteurs comme combinaison linéaire des deux autres.

Résumé

À retenir

$\vec{u}, \vec{v}$ colinéaires $\iff \vec{v} = k\vec{u}$ (ou $\vec{u} = \vec{0}$) ; A, B, C alignés $\iff \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ colinéaires ; $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires ($\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaires) $\iff \vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$; A, B, C, D coplanaires $\iff \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ coplanaires.