

Cours — Chapitre 13

Dénombrement

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Ensembles finis et cardinal — II. Principe fondamental du dénombrement — III. Arrangements et permutations — IV. Combinaisons — V. Cardinal d’un produit cartésien et de l’ensemble des parties — VI. Modèles de tirages — Résumé.

Prérequis. Ensembles et applications (Ch. 02), raisonnement par récurrence (Ch. 01), sommes $\sum$.

I. Ensembles finis et cardinal

1) Activité d’introduction

Activité 1

Une classe compte 30 élèves ; 18 pratiquent le football, 12 le basket et 5 les deux sports.

1. Combien d’élèves pratiquent au moins un des deux sports ?

2. Combien d’élèves ne pratiquent aucun de ces deux sports ?

Solution

1. En additionnant $18 + 12$, les 5 élèves qui pratiquent les deux sports sont comptés deux fois : $18 + 12 - 5 = 25$ élèves.

2. $30 - 25 = 5$ élèves.

2) Cardinal d’un ensemble fini

Définition 1

Soit E un ensemble non vide. On dit que E est **fini** s’il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection de $\llbracket 1; n \rrbracket$ sur E . L’entier n est unique : c’est le **cardinal** de E , noté $\text{Card}(E)$ (ou $|E|$). Par convention $\text{Card}(\emptyset) = 0$.

Exemple 1

$\text{Card}(\llbracket n; m \rrbracket) = m - n + 1$ pour $n, m \in \mathbb{N}$, $n \leq m$. Par exemple $\text{Card}(\llbracket 3; 10 \rrbracket) = 8$.

3) Propriétés

Propriété 1 (admise)

Soient A et B deux parties d’un ensemble fini E , et $\overline{A} = E \setminus A$ le complémentaire de A dans E .

— Si $A \cap B = \emptyset$ (parties disjointes) : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.

— En général : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

— $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$.

— Si $A \subset B$ alors $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$.

— Si $A_1, \dots, A_p$ sont deux à deux disjointes : $\text{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_p) = \text{Card}(A_1) + \dots + \text{Card}(A_p)$.

Remarque 2

La règle du complémentaire est très utile pour les événements « au moins un ... » : on compte le contraire « aucun ... » et on soustrait du total.

II. Principe fondamental du dénombrement

1) Arbre des choix

Activité 2
Un menu propose 3 entrées, 4 plats et 2 desserts. Un repas se compose d’une entrée, d’un plat et d’un dessert. Combien de repas différents peut-on composer ?
Solution
On construit un arbre : 3 branches pour l’entrée, puis 4 pour le plat à partir de chaque entrée, puis 2 pour le dessert. Le nombre de chemins est $3 \times 4 \times 2 = 24$.

2) Principe multiplicatif

Propriété 2 : principe fondamental du dénombrement
Si une situation comporte p choix successifs ($p \in \mathbb{N}^*$) tels que le premier choix peut se faire de n_1 façons, le deuxième de n_2 façons (quel que soit le premier), ..., le p -ième de n_p façons, alors le nombre total de possibilités est $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$.
Exemple 2
Nombre de plaques formées de 2 lettres (parmi 26) suivies de 3 chiffres : $26^2 \times 10^3 = 676\,000$.

III. Arrangements et permutations

1) Arrangements avec répétition (p -listes)

Définition 2
Soient E un ensemble à n éléments et $p \in \mathbb{N}^*$. Une p-liste (ou arrangement avec répétition) d’éléments de E est un élément $(x_1; \dots; x_p)$ de E^p .
Propriété 3
Le nombre de p -listes d’un ensemble à n éléments est n^p .

2) Arrangements sans répétition

Définition 3
Soient $n, p \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq p \leq n$. Un arrangement de p éléments d’un ensemble E à n éléments est une p -liste d’éléments deux à deux distincts de E .
Propriété 4
Le nombre d’arrangements de p éléments parmi n est $A_n^p = n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \quad (p \text{ facteurs}),$ où $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $0! = 1$.
Solution
Preuve (principe multiplicatif). Le premier élément se choisit de n façons, le deuxième de $n - 1$ façons (il doit être différent du premier), ..., le p -ième de $n - (p - 1)$ façons.

3) Permutations

Définition 4
Une permutation d’un ensemble E à n éléments est un arrangement des n éléments de E . Leur nombre est $A_n^n = n!$.

Exemple 3

Nombre de façons d’asseoir 5 personnes sur 5 chaises alignées : $5! = 120$. Nombre de mots de 3 lettres distinctes formés avec A, B, C, D, E : $A_5^3 = 60$.

4) Applications injectives et bijectives

Propriété 5

Soient E et F deux ensembles finis avec $\text{Card}(E) = p$ et $\text{Card}(F) = n$.
— Le nombre d’applications de E dans F est n^p .
— Si $p \leq n$, le nombre d’applications **injectives** de E dans F est A_n^p .
— Si $p = n$, le nombre de **bijections** de E sur F est $n!$.

5) Permutations avec répétition

Propriété 6

Le nombre de mots (anagrammes) que l’on peut former avec n lettres dont une lettre est répétée k_1 fois, une autre k_2 fois, ..., une autre k_r fois ($k_1 + \dots + k_r = n$) est $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$.

Exemple 4

Anagrammes de « RADAR » : $\frac{5!}{2! 2! 1!} = 30$.

IV. Combinaisons

1) Définition et nombre de combinaisons

Définition 5

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$. Une **combinaison** de p éléments d’un ensemble E à n éléments est une **partie** de E ayant p éléments (l’ordre ne compte pas).

Propriété 7

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est
$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p! (n - p)!}.$$

Solution

Preuve. À chaque partie à p éléments correspondent exactement $p!$ arrangements (ses permutations) ; donc $A_n^p = p! C_n^p$.

2) Propriétés des C_n^p

Propriété 8

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$:
— $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = n$;
— si $p \leq n$: $C_n^p = C_n^{n-p}$ (symétrie) ;
— si $1 \leq p \leq n - 1$: $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ (formule de Pascal).

Théorème 1 : formule du binôme de Newton

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$.

Solution

Preuve (raisonnement par récurrence). Initialisation : pour $n = 0$, on a $(a + b)^0 = 1 = C_0^0 a^0 b^0$. Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$. Alors $(a + b)^{n+1} = (a + b)(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^{n+1-k} b^k$ et, d'après la formule de Pascal, cette somme vaut $\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k$. Conclusion : d'après le principe du raisonnement par récurrence, la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 5

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = (1 + 1)^n = 2^n \text{ et, pour } n \geq 1, \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = (1 - 1)^n = 0.$$

V. Cardinal d'un produit cartésien et de l'ensemble des parties

1) Produit cartésien

Propriété 9

Si $E_1, \dots, E_p$ sont finis : $\text{Card}(E_1 \times \dots \times E_p) = \text{Card}(E_1) \times \dots \times \text{Card}(E_p)$. En particulier $\text{Card}(E^p) = \text{Card}(E)^p$.

2) Ensemble des parties

Propriété 10

Si $\text{Card}(E) = n$, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E a pour cardinal $\sum_{p=0}^n C_n^p = 2^n$.

VI. Modèles de tirages

1) Trois types de tirages

Propriété 11 : tirage de p objets parmi n

Type de tirage	L'ordre compte ?	Répétition ?	Nombre de tirages
Successif avec remise	oui	oui	n^p
Successif sans remise	oui	non	A_n^p
Simultané	non	non	C_n^p

2) Exemple type

Exemple 6

Une urne contient 5 boules rouges et 3 vertes. On tire simultanément 3 boules. Nombre de tirages : $C_8^3 = 56$. Tirages avec exactement 2 rouges : $C_5^2 C_3^1 = 30$. Tirages avec au moins une verte : $56 - C_5^3 = 46$.

Remarque 3 : tirage successif et ordre des couleurs

Pour un tirage successif sans remise donnant 2 rouges et 1 verte, il faut multiplier par le nombre de places possibles de la verte : $3 \times A_5^2 \times A_3^1 = 180$.

Résumé

Remarque — l'essentiel

- $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cap B)$; $\text{Card } \overline{A} = \text{Card } E - \text{Card } A$.
- Principe multiplicatif : $n_1 \times \dots \times n_p$.
- n^p (ordre, répétition) ; $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ (ordre, sans répétition) ; $n!$ (permutations) ; $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ (parties).
- $C_n^p = C_n^{n-p}$, $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$, $(a + b)^n = \sum C_n^k a^{n-k} b^k$, $\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^n$.