

Cours — Chapitre 12

Étude de fonctions

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Branches infinies d’une courbe (asymptotes verticales et horizontales, asymptote oblique, branches paraboliques) — II. Concavité d’une courbe, points d’inflexion — III. Éléments de symétrie, périodicité — IV. Construction d’une courbe — Résumé.

Prérequis. Limites (Ch. 09), dérivation (Ch. 11). Dans tout le chapitre, f est une fonction numérique, D_f son domaine de définition et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

I. Branches infinies d’une courbe

1) Notion de branche infinie

Définition 1

On dit que $(\mathcal{C}_f)$ admet une **branche infinie** lorsque l’une au moins des coordonnées d’un point $M(x; f(x))$ de $(\mathcal{C}_f)$ tend vers l’infini, c’est-à-dire lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, ou $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$, ou $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Les branches infinies apparaissent donc aux bornes de D_f ; ce sont des **asymptotes** ou des **branches paraboliques**.

2) Asymptote verticale, asymptote horizontale

Définition 2

— Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ (ou seulement à droite, ou à gauche, de a), la droite d’équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à $(\mathcal{C}_f)$.

— Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$), $b \in \mathbb{R}$, la droite d’équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Exemple 1

Soit $f(x) = \frac{3x + 1}{x - 2}$. Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.

Solution

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. $\lim_{\pm\infty} f(x) = \lim_{\pm\infty} \frac{3x}{x} = 3$: la droite $y = 3$ est asymptote horizontale au voisinage de $\pm\infty$. En 2 : le numérateur tend vers 7 et $x - 2 \rightarrow 0^\pm$, donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$: la droite $x = 2$ est asymptote verticale.

3) Asymptote oblique

Définition 3

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ (resp. en $-\infty$), on dit que la droite $(D) : y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Propriété 1 : recherche de l’asymptote

Supposons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ **et** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$ avec $b \in \mathbb{R}$, alors la droite $y = ax + b$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ (de même en $-\infty$).

Propriété 2 : position relative

La position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à $(D) : y = ax + b$ s'obtient par le signe de $f(x) - (ax + b)$: si $f(x) - (ax + b) > 0$ sur I , $(\mathcal{C}_f)$ est **au-dessus** de (D) sur I ; si $f(x) - (ax + b) < 0$, elle est **au-dessous** ; si $f(x) - (ax + b) = 0$, elles se coupent au point d'abscisse x .

Exemple 2

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrer que $(D) : y = x - 1$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $\pm\infty$, et étudier la position relative.

Solution

$x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$, donc $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-1}$ et $f(x) - (x - 1) = \frac{1}{x-1} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$: (D) est asymptote oblique au voisinage de $\pm\infty$. $\frac{1}{x-1} > 0 \iff x > 1$: $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de (D) sur $]1; +\infty[$ et au-dessous sur $] - \infty; 1[$.

4) Branches paraboliques**Définition 4**

Supposons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ (même chose en $-\infty$).

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$: $(\mathcal{C}_f)$ admet une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées** au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$: $(\mathcal{C}_f)$ admet une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses**.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$: $(\mathcal{C}_f)$ admet une **branche parabolique de direction la droite $y = ax$** .

Remarque 1

Le calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ n'a de sens pour classer une branche que si l'on a d'abord vérifié que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$. Par exemple pour $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$: il n'y a pas de branche parabolique (asymptote horizontale $y = 0$).

Exemple 3

Étudier la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ pour $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x+1}$ et $h(x) = 2x + \sqrt{x}$.

Solution

- $\lim f = +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = x + \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$: direction l'axe des ordonnées.
- $\lim g = +\infty$ et $\frac{g(x)}{x} = \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \rightarrow 0$: direction l'axe des abscisses.
- $\lim h = +\infty$, $\frac{h(x)}{x} = 2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 2$ et $h(x) - 2x = \sqrt{x} \rightarrow +\infty$: branche parabolique de direction la droite $y = 2x$.

II. Concavité d'une courbe — points d'inflexion**1) Définitions**

Définition 5

Soit f dérivable sur un intervalle I .

- $(\mathcal{C}_f)$ est **convexe** sur I si elle est située au-dessus de chacune de ses tangentes en des points d'abscisses dans I .
- $(\mathcal{C}_f)$ est **concave** sur I si elle est située au-dessous de chacune de ses tangentes.
- Un point $A(a; f(a))$ où $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente et **change de concavité** s'appelle un **point d'inflexion** ; en ce point la tangente traverse la courbe.

2) Concavité et dérivée seconde**Propriété 3 (admise)**

Soit f deux fois dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.

- $(\mathcal{C}_f)$ est convexe sur $I \iff (\forall x \in I) f''(x) \geq 0$.
- $(\mathcal{C}_f)$ est concave sur $I \iff (\forall x \in I) f''(x) \leq 0$.
- Si f'' s'annule en a **en changeant de signe**, alors $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$.
- Si f' s'annule en a sans changer de signe (et f' garde le même signe autour de a), alors $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion, à tangente horizontale.

Remarque 2

$f''(a) = 0$ ne suffit pas : pour $f(x) = x^4$, $f''(0) = 0$ mais $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ ne change pas de signe, donc O n'est pas un point d'inflexion (la courbe est convexe sur $\mathbb{R}$).

Exemple 4

Étudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ pour $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

Solution

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ et $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		—	0	+	
$(\mathcal{C}_f)$		concave	$I(2; 3)$	convexe	

f'' s'annule en 2 en changeant de signe : $I(2; f(2)) = I(2; 3)$ est un point d'inflexion.

III. Éléments de symétrie — périodicité**1) Centre et axe de symétrie****Propriété 4**

- Le point $\Omega(a; b)$ est un **centre de symétrie** de $(\mathcal{C}_f)$ si et seulement si, pour tout $x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = 2b - f(x)$.
- La droite d'équation $x = a$ est un **axe de symétrie** de $(\mathcal{C}_f)$ si et seulement si, pour tout $x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.

Remarque 3 : cas particuliers

- f impaire : O est centre de symétrie ; f paire : l'axe des ordonnées est axe de symétrie.
- La courbe d'une fonction homographique $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$) admet le centre de symétrie $\Omega\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$; celle de $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) admet l'axe $x = -\frac{b}{2a}$.
- Un élément de symétrie permet de réduire l'intervalle d'étude.

Exemple 5

Montrer que $\Omega(1;0)$ est centre de symétrie de la courbe de $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ (exemple 2).

Solution

Si $x \neq 1$ alors $2-x \neq 1$, donc $2-x \in D_f$. Et $f(2-x) = (2-x)-1 + \frac{1}{(2-x)-1} = 1-x - \frac{1}{x-1} = -f(x) = 2 \times 0 - f(x)$.

2) Fonction périodique

Définition 6

f est **périodique de période** $T > 0$ si, pour tout $x \in D_f : x+T \in D_f, x-T \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$. Il suffit alors d'étudier f sur un intervalle de longueur T ; la courbe s'obtient par translations de vecteurs $kT\vec{i}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Exemple 6

$f(x) = \sin(2x)$ est périodique de période π ; elle est impaire, donc on peut l'étudier sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, compléter par symétrie de centre O sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, puis par translations.

IV. Construction d'une courbe

Méthode plan d'étude d'une fonction

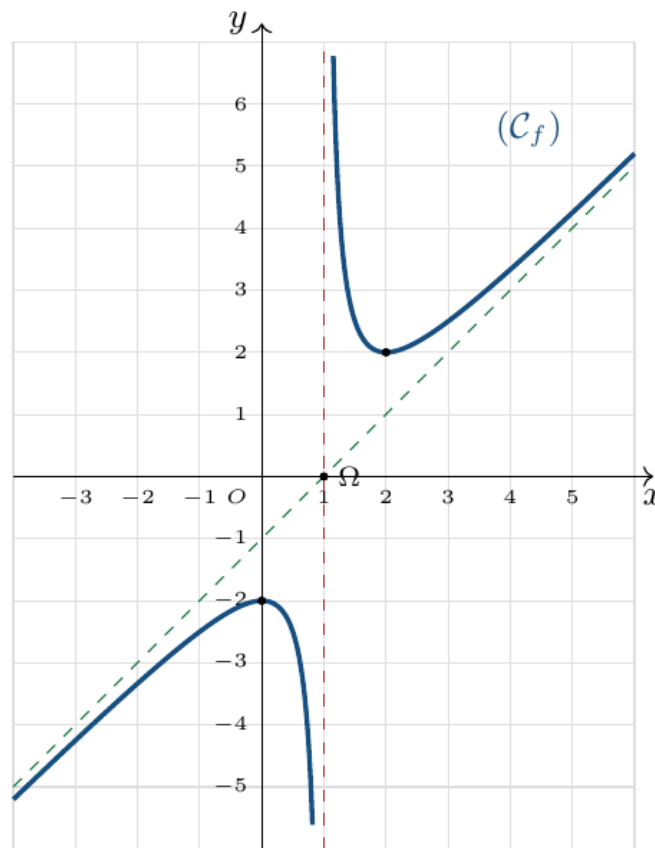
1. Domaine de définition, réduction éventuelle (parité, périodicité, symétrie).
2. Limites aux bornes et branches infinies (asymptotes, branches paraboliques, positions relatives).
3. Dérivabilité (points particuliers, demi-tangentes), calcul de f' , tableau de variations.
4. Dérivée seconde, concavité, points d'inflexion.
5. Points remarquables : intersections avec les axes, tangentes utiles.
6. Tracé : repère et unités, asymptotes, tangentes, points remarquables, puis la courbe en respectant le tableau de variations et la concavité.

Exemple 7 : étude complète

Construire la courbe de $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1}$.

Solution

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; centre de symétrie $\Omega(1;0)$; asymptote verticale $x = 1$ ($\lim_{1+} f = +\infty, \lim_{1-} f = -\infty$), asymptote oblique $y = x - 1$ en $\pm\infty$.
- $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} : f$ croît sur $] -\infty; 0]$, décroît sur $[0; 1[$ et sur $]1; 2]$, croît sur $[2; +\infty[$; $f(0) = -2$ (maximum local), $f(2) = 2$ (minimum local).
- $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} : \text{concave sur }] -\infty; 1[, \text{convexe sur }]1; +\infty[$; pas de point d'inflexion ($1 \notin D_f$).



Remarque 4 : utilisation graphique

Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ est le nombre de points d'intersection de (C_f) avec la droite horizontale $y = m$; les solutions de $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situés au-dessous de (C_g) .

Résumé

À retenir

- $\lim_a f = \pm\infty$: asymptote verticale $x = a$; $\lim_{\pm\infty} f = b$: asymptote horizontale $y = b$.
- $\lim_{\pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$: asymptote oblique $y = ax + b$; on cherche $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$.
- Si $\lim f = \pm\infty$: $\frac{f(x)}{x} \rightarrow \pm\infty$ (direction (Oy)), $\rightarrow 0$ (direction (Ox)), $\rightarrow a \neq 0$ et $f(x) - ax \rightarrow \pm\infty$ (direction $y = ax$).
- Position relative : signe de $f(x) - (ax + b)$. Concavité : signe de f'' ; inflexion : f'' s'annule en changeant de signe.
- Centre $\Omega(a; b)$: $f(2a - x) = 2b - f(x)$; axe $x = a$: $f(2a - x) = f(x)$ (avec $2a - x \in D_f$).