

Cours — Chapitre 11

Dérivation

Plan du chapitre. I. Dérivabilité en un point — II. Interprétation géométrique : tangente — III. Approximation affine — IV. Dérivabilité à droite et à gauche — V. Fonction dérivée, dérivées usuelles — VI. Opérations sur les fonctions dérivées — VII. Dérivées successives — VIII. Dérivée et sens de variation — IX. Dérivée et extremums — X. L'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ — Résumé.

Prérequis. Fonctions numériques (Ch. 04), trigonométrie (Ch. 08), limites (Ch. 09). Les asymptotes et l'étude complète des branches infinies seront vues au chapitre 12.

I. Dérivabilité d'une fonction en un point

1) Activité

Activité 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 5$.

2. En déduire $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h}$.

Solution

1. Pour $x \neq 2$: $f(x) - f(2) = x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$, donc $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = x + 3 \rightarrow 5$.

2. On pose $x = 2 + h$: quand $h \rightarrow 0$, $x \rightarrow 2$, donc la limite vaut aussi 5.

2) Définition

Définition 1 : nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. On dit que f est **dérivable en a** s'il existe un réel ℓ tel que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell.$$

Le réel ℓ s'appelle le **nombre dérivé** de f en a ; on le note $f'(a)$.

Remarque 1

En posant $h = x - a$: f est dérivable en a de nombre dérivé ℓ si et seulement si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \ell$. Si la limite est infinie ou n'existe pas, f n'est pas dérivable en a .

Exemple 1

Étudier la dérivabilité en a dans chacun des cas : $f(x) = x^3$, $a = -1$; $g(x) = \sqrt{x}$, $a = 0$ (à droite) ; $k(x) = \cos x$, $a = 0$.

Solution

— $\frac{x^3 + 1}{x + 1} = x^2 - x + 1 \rightarrow 3$: f est dérivable en -1 et $f'(-1) = 3$.

— $\frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$: g n'est pas dérivable (à droite) en 0.

— $\frac{\cos x - 1}{x} = -x \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow 0 \times \frac{1}{2} = 0$: k est dérivable en 0 et $k'(0) = 0$.

II. Interprétation géométrique du nombre dérivé

1) Tangente à une courbe

Propriété 1

Soit f dérivable en a et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative. La **tangente** à $(\mathcal{C}_f)$ au point $A(a; f(a))$ est la droite passant par A de coefficient directeur $f'(a)$; son équation est

$$(T) : y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Remarque 2

- Si $f'(a) = 0$, la tangente en A est **horizontale**.
- Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points distincts de la tangente au point d'abscisse a , alors $f'(a) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ (lecture graphique).

2) Exemple

Exemple 2

Soit $f(x) = \sqrt{2x+5}$. Déterminer une équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 2.

Solution

Pour $x \neq 2$, $x \geq -\frac{5}{2}$: $\frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2} = \frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)} = \frac{2}{\sqrt{2x+5}+3} \rightarrow \frac{1}{3}$. Donc $f'(2) = \frac{1}{3}$, $f(2) = 3$ et $(T) : y = \frac{1}{3}(x-2) + 3 = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$.

III. Approximation affine

Propriété 2 : approximation affine

Soit f dérivable en a . Il existe une fonction φ définie au voisinage de 0 telle que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varphi(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0.$$

La fonction $x \mapsto f'(a)(x-a) + f(a)$ s'appelle l'**approximation affine** de f au voisinage de a ; pour h proche de 0 on écrit $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$.

Exemple 3

Soit $f(x) = (1+x)^3$. Montrer que $f'(0) = 3$, puis donner une valeur approchée de $(1,002)^3$.

Solution

$\frac{(1+x)^3-1}{x} = x^2 + 3x + 3 \rightarrow 3$, donc $f'(0) = 3$ et $(1+h)^3 \approx 1 + 3h$ pour h voisin de 0. Avec $h = 0,002$: $(1,002)^3 \approx 1,006$ (valeur exacte : 1,006012008).

IV. Dérivabilité à droite, dérivabilité à gauche

1) Définitions

Définition 2

- f définie sur $[a; a+r[$ ($r > 0$) est **dérivable à droite** en a si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$); on note $f'_d(a) = \ell$.
- f définie sur $]a-r; a]$ est **dérivable à gauche** en a si $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell'$ ($\ell' \in \mathbb{R}$); on note $f'_g(a) = \ell'$.

Propriété 3

f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a **et** $f'_d(a) = f'_g(a)$.

2) Interprétation géométrique

Propriété 4 : demi-tangentes

- Si $f'_d(a)$ existe, $(\mathcal{C}_f)$ admet au point $A(a; f(a))$ la **demi-tangente** : $y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$, $x \geq a$.
- Si $f'_g(a)$ existe : demi-tangente $y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$, $x \leq a$.
- Si $f'_d(a) \neq f'_g(a)$, le point A est un **point anguleux** de $(\mathcal{C}_f)$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, $(\mathcal{C}_f)$ admet en A une **demi-tangente verticale** (parallèle à l'axe des ordonnées), dirigée vers le haut ou vers le bas selon le signe de la limite et le côté considéré.

Exemple 4

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x^2 - 4x|$. Étudier la dérivabilité de f en 0.

Solution

$x^2 - 4x = x(x - 4)$ est positif pour $x \leq 0$ et négatif pour $0 \leq x \leq 4$.

- Pour $x < 0$: $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 - 4x}{x} = x - 4 \rightarrow -4$, donc $f'_g(0) = -4$.
- Pour $0 < x < 4$: $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-x^2 + 4x}{x} = 4 - x \rightarrow 4$, donc $f'_d(0) = 4$.

$f'_g(0) \neq f'_d(0)$: f n'est pas dérivable en 0 ; le point $O(0; 0)$ est un point anguleux, avec les demi-tangentes $y = -4x$ ($x \leq 0$) et $y = 4x$ ($x \geq 0$).

Application 1

Soit $f(x) = \sqrt{x-1}$ si $x \geq 1$ et $f(x) = x^2 - 1$ si $x < 1$. Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 1 et interpréter.

Solution

À droite : $\frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \rightarrow +\infty$: pas dérivable à droite, demi-tangente verticale dirigée vers le haut. À gauche : $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1 \rightarrow 2$: $f'_g(1) = 2$, demi-tangente $y = 2(x-1)$, $x \leq 1$.

V. Dérivabilité sur un intervalle — fonction dérivée

1) Définitions

Définition 3

- f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ si elle est dérivable en tout point de $]a; b[$.
- f est dérivable sur $[a; b]$ si elle est dérivable sur $]a; b[$, à droite en a et à gauche en b (de même pour $]a; b[,]a; b]$, avec a, b finis ou infinis).
- Si f est dérivable sur I , la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ définie sur I s'appelle la **fonction dérivée** de f .

Exemple 5

Soit $f(x) = x^4$. Soit $t \in \mathbb{R}$; pour $x \neq t$: $\frac{x^4 - t^4}{x - t} = x^3 + x^2t + xt^2 + t^3 \rightarrow 4t^3$. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 4x^3$.

2) Dérivées des fonctions usuelles

Propriété 5 (admise sauf exemples traités)

a, b réels, $n \in \mathbb{N}^*$.

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle(s) de dérivabilité
c (constante)	0	$\mathbb{R}$
$ax + b$	a	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$] -\infty; 0[,]0; +\infty[$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$] -\infty; 0[,]0; +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\sin(ax + b)$	$a \cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax + b)$	$-a \sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$

VI. Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété 6

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Fonction	Dérivée	Condition
$u + v$	$u' + v'$	—
αu	$\alpha u'$	—
$u \times v$	$u'v + uv'$	—
u^n	$nu'u^{n-1}$	—
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$v(x) \neq 0$ sur I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$v(x) \neq 0$ sur I
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u(x) > 0$ sur I

Propriété 7

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur chacun des intervalles de son domaine de définition.

Exemple 6

Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = (2x^2 - 3)^4$, $g(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ et $h(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Solution

- $f'(x) = 4 \times 4x \times (2x^2 - 3)^3 = 16x(2x^2 - 3)^3$ sur $\mathbb{R}$.
- $g'(x) = \frac{(x^2+1)-(x+1) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$.
- $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$.

Méthode calculer un nombre dérivé

Trois méthodes pour obtenir $f'(a)$: (1) calculer $f'(x)$ puis remplacer x par a ; (2) calculer $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$; (3) lire le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a . Inversement, une limite de la forme $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ se calcule en reconnaissant le nombre dérivé $f'(a)$.

Application 2

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 1}{x - 1}$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{6x - \pi}$.

Solution

Avec $f(x) = x^{10}$: la première limite vaut $f'(1) = 10$. Avec $g(x) = 2 \sin x$: $\frac{2 \sin x - 1}{6x - \pi} = \frac{1}{6} \cdot \frac{g(x) - g(\frac{\pi}{6})}{x - \frac{\pi}{6}} \rightarrow \frac{1}{6} \times 2 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

VII. Dérivées successives
Définition 4

Si f est dérivable sur I et si f' est elle-même dérivable sur I , la dérivée de f' s'appelle la **dérivée seconde** de f , notée f'' ou $f^{(2)}$. Par itération, pour $n \geq 2$, $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$ est la **dérivée d'ordre n** de f (lorsqu'elle existe). Si $y = f(x)$, on note aussi $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

Exemple 7

Soit $f(x) = \sin x$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ (avec $f^{(0)} = f$).

Solution

On raisonne par récurrence sur n .

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin(x + 0)$: la propriété est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ pour tout x . Alors $f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$.
- **Conclusion.** D'après le principe du raisonnement par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

VIII. Dérivée et sens de variation
Propriété 8

Soit f dérivable sur un intervalle I .

- f est croissante sur $I \iff (\forall x \in I) f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur $I \iff (\forall x \in I) f'(x) \leq 0$.
- f est constante sur $I \iff (\forall x \in I) f'(x) = 0$.
- Si $f' > 0$ sur I sauf en un nombre fini de points (ou en des points isolés) où elle s'annule, f est **strictement croissante** sur I (de même pour strictement décroissante avec $f' < 0$).

Exemple 8

Dresser le tableau de variations de $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Solution

$f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x-1)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$: f est strictement croissante sur $] -\infty; -2[$ et sur $] -2; +\infty[$. Limites : $\lim_{\pm\infty} f = 2$; en -2 , le numérateur tend vers -5 , donc $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	2

Attention : f n'est pas croissante sur D_f (qui n'est pas un intervalle) : $f(-3) = 7 > f(0) = -\frac{1}{2}$.

IX. Dérivée et extremums

Propriété 9

Soit f dérivable sur un intervalle **ouvert** I et $a \in I$.

- Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$ (la tangente au point d'abscisse a est horizontale).
- Si f' s'annule en a **en changeant de signe**, alors $f(a)$ est un extremum local de f .

Remarque 3

La réciproque du premier point est fausse : pour $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ mais $f(0)$ n'est pas un extremum (f' ne change pas de signe). On rappelle : $f(a)$ est la valeur maximale (resp. minimale) de f sur I si $(\forall x \in I) f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).

Exemple 9

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} : x^4 - 4x \geq -3$.

Solution

Soit $f(x) = x^4 - 4x$; $f'(x) = 4(x^3 - 1) = 4(x - 1)(x^2 + x + 1)$ a le signe de $x - 1$ (car $x^2 + x + 1 > 0$). f est décroissante sur $] -\infty; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$: $f(1) = -3$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$, d'où $x^4 - 4x \geq -3$.

X. L'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ **Définition 5**

Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction y et qui fait intervenir ses dérivées $y', y'', \dots$

Propriété 10 (admise)

Soit ω un réel non nul. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions

$$y(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x), \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour x_0, y_0, y_1 réels donnés, il existe une **unique** solution vérifiant $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.

Remarque 4

Les solutions de $y'' = 0$ ($\omega = 0$) sont les fonctions affines $x \mapsto ax + b$.

Exemple 10

Déterminer la solution de $y'' + 9y = 0$ vérifiant $y(0) = 2$ et $y'(0) = -3$.

Solution

$\omega = 3$: $y(x) = \alpha \cos 3x + \beta \sin 3x$ et $y'(x) = -3\alpha \sin 3x + 3\beta \cos 3x$. $y(0) = \alpha = 2$ et $y'(0) = 3\beta = -3$, donc $\beta = -1$: $y(x) = 2 \cos 3x - \sin 3x$.

Résumé**À retenir**

- f dérivable en $a \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R}$; tangente : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
- Approximation affine : $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$ pour h voisin de 0.
- f dérivable en $a \iff f'_d(a)$ et $f'_g(a)$ existent et sont égaux; $f'_d(a) \neq f'_g(a)$: point anguleux; limite infinie : demi-tangente verticale.
- $(uv)' = u'v + uv'$, $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $(u^n)' = nu'u^{n-1}$, $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- Signe de $f' \Rightarrow$ sens de variation; f' s'annule en changeant de signe en $a \Rightarrow$ extremum local en a .
- $y'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega \neq 0$) : $y = \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$.