

Cours — Chapitre 10

Rotation dans le plan

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Définition d’une rotation, rotation réciproque — II. Image des figures usuelles — III. Propriétés d’une rotation — IV. Composition de rotations, décomposition d’une rotation — Résumé.

Prérequis. Angles orientés et relation de Chasles (Ch. 08), barycentre (Ch. 05), médiatrice, symétries axiales et translations (collège / tronc commun). Le plan $\mathcal{P}$ est orienté dans le sens direct.

I. Définition d’une rotation — rotation réciproque

1) Rappels

Remarque 1 : rappels

— La médiatrice d’un segment $[AB]$ est l’ensemble des points équidistants de A et de B .

— $x \equiv y [2\pi] \iff (\exists k \in \mathbb{Z}) \ x = y + 2k\pi$.

— $(\vec{v}; \vec{u}) \equiv -(\vec{u}; \vec{v})$; $(-\vec{u}; \vec{v}) \equiv \pi + (\vec{u}; \vec{v})$; $(\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; \vec{w}) \equiv (\vec{u}; \vec{w}) [2\pi]$ (Chasles).

2) Activité

Activité 1

Soit O un point et $A \neq O$. Construire le point A' tel que $OA' = OA$ et $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OA'}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Combien y a-t-il de tels points ?

Solution

A' est sur le cercle de centre O passant par A , et sur la demi-droite d’origine O faisant l’angle $\frac{\pi}{3}$ avec $[OA]$: il existe un **unique** tel point.

3) Définition

Définition 1 : rotation

Soient O un point du plan et α un réel. La **rotation de centre O et d’angle α** , notée $r(O; \alpha)$, est l’application du plan dans lui-même qui associe à tout point M le point M' défini par :

— si $M = O$: $M' = O$;

— si $M \neq O$: $OM' = OM$ et $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) \equiv \alpha [2\pi]$.

Définition 2 : rotation réciproque

La rotation $r(O; -\alpha)$ est appelée rotation réciproque de $r = r(O; \alpha)$; on la note r^{-1} . Pour tous points M et N : $r^{-1}(N) = M \iff r(M) = N$.

Exemple 1

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $r = r(A; \frac{\pi}{3})$. Montrer que $r(C) = B$.

Solution

$AC = AB$ et $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) \equiv -(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}$. Donc $r(C) = B$.

Remarque 2

1. Si $\alpha \not\equiv 0 [2\pi]$, le centre O est l'unique point invariant de $r(O; \alpha)$, et si $r(M) = N$ ($M \neq O$), alors O appartient à la médiatrice de $[MN]$.
2. Si $\alpha \equiv 0 [2\pi]$, r est l'identité ; si $\alpha \equiv \pi [2\pi]$, r est la symétrie centrale de centre O .

II. Image des figures usuelles

Propriété 1

Soit r une rotation, $r(M) = M'$, $r(N) = N'$, $r(E) = E'$, $r(F) = F'$.

Figure	Droite (MN)	Demi-droite $[MN]$	Segment $[MN]$	Cercle $\mathcal{C}(M; R)$	Triangle MNE
Image par r	droite $(M'N')$	demi-droite $[M'N']$	segment $[M'N']$	cercle $\mathcal{C}(M'; R)$	triangle $M'N'E'$

L'image d'un quadrilatère $MNEF$ est le quadrilatère $M'N'E'F'$ de même nature.

Exemple 2

Soit $ABCD$ un rectangle et $r = r\left(A; \frac{5\pi}{6}\right)$. Décrire l'image du rectangle $ABCD$ par r .

Solution

C'est le rectangle $AB'C'D'$, où $B' = r(B)$, $C' = r(C)$, $D' = r(D)$: il a les mêmes dimensions que $ABCD$ (conservation des distances et des angles).

III. Propriétés d'une rotation

1) Propriétés de conservation

Propriété 2 : une rotation conserve...

Soit r une rotation d'angle α ; pour tout point X , on note $X' = r(X)$.

1. les **distances** : $M'N' = MN$;
2. les **angles orientés** : $\left(\overrightarrow{M'N'}; \overrightarrow{E'F'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{EF}\right) [2\pi]$;
3. l'**alignement** et le **coefficient de colinéarité** : $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{EF} \implies \overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{E'F'}$;
4. le **barycentre** : $G = \text{Bar}\{(M; a); (N; b)\} \implies G' = \text{Bar}\{(M'; a); (N'; b)\}$; en particulier le **milieu** et le **centre de gravité** ;
5. l'**appartenance**, l'**intersection**, le **parallélisme** et l'**orthogonalité**.

Propriété 3 : angle d'une rotation

Si r est une rotation d'angle α et $M \neq N$, alors $\left(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{r(M)r(N)}\right) \equiv \alpha [2\pi]$. En particulier, si $\alpha \equiv \pm \frac{\pi}{2}$, $(MN) \perp (r(M)r(N))$.

Propriété 4 : existence

Soient A, B, A', B' quatre points tels que $A \neq B$, $AB = A'B'$ et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$. Il existe une unique rotation r telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$; son angle mesure $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}\right)$ et son centre est l'intersection des médiatrices de $[AA']$ et $[BB']$ (lorsqu'elles sont sécantes).

2) Application

Application 1

Soit ABC un triangle équilatéral direct et D un point de $[AB]$. On pose $r = r(A; \frac{\pi}{3})$, $E = r(D)$. Montrer que $E \in [AC]$ et que $(DE) \parallel (BC)$.

Solution

$r(B) = C$ (triangle équilatéral direct); r conserve l'appartenance : $D \in [AB] \implies E = r(D) \in [r(A)r(B)] = [AC]$. Et $AD = AE$ avec $\widehat{DAE} = 60^\circ$: ADE est équilatéral, donc $\widehat{ADE} = \widehat{ABC} = 60^\circ$ et $(DE) \parallel (BC)$ (angles correspondants).

IV. Composition de rotations — décomposition

Théorème 1 : composée de deux rotations

Soient $r_1 = r(O_1; \alpha_1)$ et $r_2 = r(O_2; \alpha_2)$.

- Si $O_1 = O_2$, $r_2 \circ r_1$ est la rotation de centre O_1 et d'angle $\alpha_1 + \alpha_2$.
- Si $O_1 \neq O_2$ et $\alpha_1 + \alpha_2 \not\equiv 0 [2\pi]$, $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle $\alpha_1 + \alpha_2$.
- Si $O_1 \neq O_2$ et $\alpha_1 + \alpha_2 \equiv 0 [2\pi]$, $r_2 \circ r_1$ est une translation.

Théorème 2 : composée de deux symétries axiales

Soient (Δ_1) et (Δ_2) deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. Si $(\Delta_1) \cap (\Delta_2) = \{\Omega\}$, alors $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)} = r(\Omega; 2(\vec{u}; \vec{v}))$.
2. Si $(\Delta_1) \parallel (\Delta_2)$, alors $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{HK}$, où $H \in (\Delta_1)$ et K est le projeté orthogonal de H sur (Δ_2) .

Théorème 3 : décomposition

Toute rotation $r(\Omega; \alpha)$ s'écrit $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$ où (Δ_1) est une droite quelconque passant par Ω et (Δ_2) la droite passant par Ω telle que $(\vec{u}; \vec{v}) \equiv \frac{\alpha}{2} [\pi]$.

Exemple 3

Soit $ABCD$ un carré tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}$. Montrer que $r(A; \frac{\pi}{2}) = S_{(AD)} \circ S_{(AC)}$ et déterminer la nature de $S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$.

Solution

(AC) et (AD) se coupent en A et $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{4}$, donc $S_{(AD)} \circ S_{(AC)} = r(A; 2 \times \frac{\pi}{4}) = r(A; \frac{\pi}{2})$. Les diagonales (BD) et (AC) se coupent au centre O et sont perpendiculaires : $S_{(AC)} \circ S_{(BD)} = r(O; \pi)$, la symétrie centrale de centre O .

Résumé

À retenir

- $r(O; \alpha)(M) = M' \iff OM' = OM$ et $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) \equiv \alpha [2\pi]$ ($M \neq O$); $r^{-1} = r(O; -\alpha)$.
- Une rotation conserve distances, angles orientés, alignement, colinéarité, barycentre, milieu, parallélisme, orthogonalité.
- $(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{r(M)r(N)}) \equiv \alpha$: c'est ainsi qu'on lit l'angle d'une rotation.
- Composées : mêmes centres ou somme des angles $\not\equiv 0 \Rightarrow$ rotation; somme $\equiv 0$, centres distincts $\Rightarrow$ translation. $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)} = r(\Omega; 2(\vec{u}; \vec{v}))$.