

Cours — Chapitre 09

Limite d’une fonction

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Limites usuelles — II. Opérations sur les limites — III. Limites des polynômes et des fonctions rationnelles — IV. Limites des fonctions trigonométriques — V. Limite et ordre — VI. Détermination graphique des limites — VII. Définition mathématique de la limite — Résumé.

Prérequis. Fonctions numériques (Ch. 04), calcul algébrique, ordre dans $\mathbb{R}$, trigonométrie (Ch. 08). La continuité et la dérivation ne sont pas encore étudiées : elles ne sont pas utilisées ici.

I. Limites usuelles

1) Activité d’introduction

Activité 1

1. Compléter un tableau de valeurs de x^2 , x^3 , $\sqrt{x}$ et $\frac{1}{x}$ pour $x \in \{1; 10; 10^2; 10^3; 10^6\}$.

2. Que deviennent ces nombres lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes ? Et $\frac{1}{x}$ lorsque x s’approche de 0 en restant positif, puis négatif ?

Solution

1. Par exemple pour $x = 10^6$: $x^2 = 10^{12}$, $x^3 = 10^{18}$, $\sqrt{x} = 10^3$, $\frac{1}{x} = 10^{-6}$.

2. x^2 , x^3 , $\sqrt{x}$ deviennent aussi grands que l’on veut : on dit qu’ils **tendent vers** $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$; $\frac{1}{x}$ s’approche de 0. Quand x s’approche de 0 par valeurs positives, $\frac{1}{x}$ devient aussi grand que l’on veut ($+\infty$) ; par valeurs négatives, il tend vers $-\infty$.

2) Limites usuelles

Propriété 1 : limites usuelles (admises)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

— $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ si n est pair, $-\infty$ si n est impair ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

— $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$.

— $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$ si n est pair, $-\infty$ si n est impair ; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

— Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $c \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ et $\lim_{x \rightarrow a} x = a$.

3) Limite à droite, limite à gauche

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a; a + r[$ (resp. $]a - r; a[$), $r > 0$. On note $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$) la limite de f à droite (resp. à gauche) en a .

Propriété 2

f admet la limite ℓ en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$. En particulier, si les limites à droite et à gauche en a sont différentes, f n’admet pas de limite en a .

Remarque 1 : conditions d’existence

Pour parler de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, il faut que f soit définie au voisinage de a (sauf peut-être en a), par exemple sur $]a - r; a[\cup]a; a + r[$; pour $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, il faut que f soit définie sur un intervalle $]B; +\infty[$.

Exemple 1

Soit f définie par $f(x) = \sqrt{x} - 5$ si $x > 4$ et $f(x) = x - 5 + \frac{1}{x}$ si $x < 4$, $x \neq 0$. Étudier la limite de f en 4.

Solution

$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 2 - 5 = -3$ et $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$. Ces limites sont différentes : f n'admet pas de limite en 4.

II. Opérations sur les limites**1) Tableaux d'opérations****Propriété 3 : somme, produit, quotient (admise)**

ℓ et ℓ' désignent des réels ; les limites sont prises au même point (a , $a^\pm$ ou $\pm\infty$).

$\lim f$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(f+g)$	$\ell + \ell'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

$\lim f$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim(f \times g)$	$\ell\ell'$	$\pm\infty$ (règle des signes)	$\pm\infty$ (règle des signes)	F.I.

$\lim f$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0^+ ou 0^-	ℓ'	$\pm\infty$	0
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$ (signes)	$\pm\infty$ (signes)	F.I.	F.I.

Propriété 4 : racine carrée et valeur absolue

Si $f \geq 0$ au voisinage du point et $\lim f = \ell \geq 0$, alors $\lim \sqrt{f} = \sqrt{\ell}$; si $\lim f = +\infty$, alors $\lim \sqrt{f} = +\infty$. Si $\lim f = \ell$, alors $\lim |f| = |\ell|$.

Remarque 2 : les quatre formes indéterminées

$+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$. Pour « lever » l'indétermination : factorisation (par $x - a$ ou par le terme dominant), identités remarquables, expression conjuguée, changement de variable, encadrement.

2) Exemples**Exemple 2 : formes déterminées**

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} + x \right)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4}{2-x}$.

Solution

La première est $0 + 0 + (+\infty) = +\infty$. Pour la seconde : $2 - x \rightarrow 0^-$, forme $\frac{4}{0^-}$, la limite est $-\infty$.

Exemple 3 : factorisation par $x - a$

Calculer $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ et $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 + x - 12}$.

Solution

$\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3 \rightarrow 6$. $\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+4)} = \frac{x^2+3x+9}{x+4} \rightarrow \frac{27}{7}$.

Méthode expression conjuguée

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b \text{ et } (\sqrt{a} - b)(\sqrt{a} + b) = a - b^2 \text{ (} a, b \geq 0 \text{)}.$$

Application 1

$$\text{Calculer } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x).$$

Solution

$$\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \sqrt{x} + 2 \rightarrow 4. \quad \sqrt{x^2+x} - x = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

III. Limites des polynômes et des fonctions rationnelles**Propriété 5**

Soient P et Q deux polynômes, $a \in \mathbb{R}$ avec $Q(a) \neq 0$.

- $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$ et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$.
- En $\pm\infty$, un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré ; une fraction rationnelle a la même limite que le quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple 4

$$\text{Calculer } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x^5 + 1) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 + 3x^2 - 4x + 5}{x^2 + x^3 - 1}.$$

Solution

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^5) = +\infty. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3}{x^3} = -1.$$

Remarque 3 : forme $\sqrt{ax^2 + bx + c} \pm (\alpha x + \beta)$

Si $\sqrt{a} = |\alpha|$ (forme indéterminée), on multiplie par l'expression conjuguée ; sinon on factorise par x sous la racine en utilisant $\sqrt{x^2} = |x|$.

IV. Limites des fonctions trigonométriques**Propriété 6 (admise)**

- Pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$ et $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$; pour $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) : $\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.
- Pour $a \neq 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{ax} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2}$.

Exemple 5

$$\text{Calculer } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(5x)}{x^2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\tan(x-5)}{x-5}.$$

Solution

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \rightarrow \frac{3}{4} ; 25 \cdot \frac{1 - \cos 5x}{(5x)^2} \rightarrow \frac{25}{2} ; \text{ avec } X = x - 5 \rightarrow 0, \frac{\tan X}{X} \rightarrow 1.$$

Attention

Les fonctions $\cos$, $\sin$ et $\tan$ n'admettent pas de limite en $\pm\infty$.

V. Limite et ordre

Propriété 7 (admise)

Soient f, g, h définies au voisinage du point considéré ($a, a^\pm$ ou $\pm\infty$), et $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Si $g \leq f \leq h$ et $\lim g = \lim h = \ell$, alors $\lim f = \ell$ (« gendarmes »).
2. Si $|f - \ell| \leq u$ et $\lim u = 0$, alors $\lim f = \ell$.
3. Si $f \geq u$ et $\lim u = +\infty$, alors $\lim f = +\infty$; si $f \leq u$ et $\lim u = -\infty$, alors $\lim f = -\infty$.

Exemple 6

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \cos x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x}$.

Solution

$x^2 + \cos x \geq x^2 - 1 \rightarrow +\infty$, donc la limite est $+\infty$. $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \rightarrow 0$: la limite est 0. Pour $x > 0$: $x - 1 < E(x) \leq x$, donc $1 - \frac{1}{x} < \frac{E(x)}{x} \leq 1$: la limite est 1.

VI. Détermination graphique des limites

Méthode

Sur la courbe d'une fonction : une branche qui se rapproche d'une droite horizontale $y = \ell$ au voisinage de $+\infty$ traduit $\lim_{+\infty} f = \ell$; une branche qui « monte » indéfiniment le long de la droite $x = a$ traduit une limite $+\infty$ (à droite ou à gauche) en a . On lit aussi le tableau de variations complété par ces limites.

VII. Définition mathématique de la limite

Définition 2

Soient $a, \ell \in \mathbb{R}$ et f définie au voisinage de a (sauf peut-être en a).

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f) \ 0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \iff (\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f) \ 0 < x - a < \alpha \Rightarrow f(x) > A$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f) \ x > B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \iff (\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f) \ x < -B \Rightarrow f(x) < -A$.

Les autres cas (a^- , $-\infty$ comme limite, etc.) s'écrivent de la même manière.

Exemple 7

Montrer, à l'aide de la définition, que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+9}{2x+3} = 2$.

Solution

Soit $\varepsilon > 0$. $\left| \frac{x+9}{2x+3} - 2 \right| = \frac{3|x-1|}{|2x+3|}$. Si $|x-1| < 1$, alors $2x+3 > 3$ et donc $|f(x) - 2| < |x-1|$. On pose $\alpha = \min(1; \varepsilon)$: si $0 < |x-1| < \alpha$, alors $|f(x) - 2| < \varepsilon$.

Résumé

À retenir

- Formes indéterminées : $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$.
- Polynôme / fraction rationnelle en $\pm\infty$: termes de plus haut degré.
- $\frac{\ell}{0^\pm}$ ($\ell \neq 0$) : étudier le signe du dénominateur.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.
- Encadrement (gendarmes), comparaison, partie entière : $x - 1 < E(x) \leq x$.