

Cours — Chapitre 08

Trigonométrie (calcul trigonométrique)

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Rappels (valeurs usuelles, identités fondamentales, angles associés) — II. Formules d'addition et de duplication — III. Tangente et formules de linéarisation — IV. Des produits aux sommes, et réciproquement — V. Transformation de $a \cos x + b \sin x$ — VI. Équations et inéquations trigonométriques — Résumé.

Cadre. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$; $(\mathcal{C})$ désigne le cercle trigonométrique de centre O , $I(1; 0)$ et $J(0; 1)$. Les lettres x, y, a, b, p, q désignent des réels et k un entier relatif. Une égalité contenant $\tan$ n'est écrite que lorsque toutes les expressions sont définies. Le symbole $\iff$ n'est employé que si chaque étape est réversible.

I. Rappels

1. Valeurs usuelles et identités fondamentales

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

Propriété — identités fondamentales, parité

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$; $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$; $\tan(x + k\pi) = \tan x$.
- $\cos$ est paire, $\sin$ et $\tan$ sont impaires : $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\tan(-x) = -\tan x$.
- Signes sur $] -\pi; \pi]$: $\sin x \geq 0 \iff x \in [0; \pi]$; $\cos x \geq 0 \iff x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

2. Angles associés

	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
$\cos$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
$\sin$	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
$\tan$	$-\tan x$	$-\tan x$	$\tan x$	$\frac{1}{\tan x}$	$-\frac{1}{\tan x}$

3. Exercices de révision

Exercice d'application de révision 1

- Donner $\cos \frac{\pi}{3}$, $\sin \frac{\pi}{3}$, $\tan \frac{\pi}{4}$, $\sin \frac{\pi}{6}$, $\tan \frac{\pi}{6}$, $\cos \pi$, $\sin \frac{3\pi}{2}$.
- Calculer $\cos \frac{3\pi}{4}$, $\sin \frac{5\pi}{6}$, $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$, $\sin \left(-\frac{3\pi}{4}\right)$, $\tan \frac{5\pi}{4}$, $\tan \left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

Solution

- $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 1 ; $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; -1 ; -1 .
- $\cos \frac{3\pi}{4} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan \frac{5\pi}{4} = \tan \frac{\pi}{4} = 1$; $\tan \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \tan \left(-\frac{2\pi}{3} + \pi\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Exercice d'application de révision 2

- Déterminer l'abscisse curviligne principale (dans $] -\pi; \pi]$) de chacun des points $A\left(-\frac{125\pi}{6}\right)$ et $B\left(\frac{47\pi}{4}\right)$ du cercle $(\mathcal{C})$.
- En déduire la mesure principale des angles orientés $\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB}\right)$.

Solution

- $-\frac{125\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} - 20\pi = -\frac{5\pi}{6} + 2 \times (-10)\pi$: abscisse principale $-\frac{5\pi}{6}$. $\frac{47\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 12\pi$: abscisse principale $-\frac{\pi}{4}$.
- $\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA}\right) \equiv -\frac{5\pi}{6} [2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB}\right) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$: ce sont les mesures principales.

Exercice d'application de révision 3

- Calculer $\cos x$ sachant que $\sin x = -\frac{1}{3}$ et $x \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$.
- Calculer $\sin y$ et $\tan y$ sachant que $\cos y = -\frac{1}{4}$ et $y \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$.
- Soit $\alpha \in]\pi; \frac{3\pi}{2}[$ tel que $\tan \alpha = 2$. Calculer $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$.

Solution

- $\cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ et $\cos x > 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}; 0[$: $\cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
- $\sin^2 y = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$ et $\sin y > 0$ sur $]\frac{\pi}{2}; \pi[$: $\sin y = \frac{\sqrt{15}}{4}$, puis $\tan y = -\sqrt{15}$.
- $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 5$ et $\cos \alpha < 0$ sur $]\pi; \frac{3\pi}{2}[$: $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, puis $\sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Exercice d'application de révision 4

Pour $x \in \mathbb{R}$, écrire en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

$$A = 3 \cos(x + 5\pi) - 2 \cos(7\pi - x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right), \quad B = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \sin(41\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos(17\pi + x),$$

$$C = \sin^2(x + 13\pi) + \cos^2(21\pi - x) + \sin^2\left(x - \frac{7\pi}{2}\right).$$

Solution

$\cos(x + 5\pi) = \cos(x + \pi) = -\cos x$; $\cos(7\pi - x) = \cos(\pi - x) = -\cos x$; $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$. Donc $A = -3 \cos x + 2 \cos x - \cos x = -2 \cos x$.

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$; $\sin(41\pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin x$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$; $\cos(17\pi + x) = -\cos x$. Donc $B = 2 \sin x \cos x$.

$\sin^2(x + 13\pi) = \sin^2 x$; $\cos^2(21\pi - x) = \cos^2 x$; $\sin\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} - 4\pi\right) = \cos x$. Donc $C = 1 + \cos^2 x$.

Exercice d'application de révision 5

On pose $A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$ et $B = \sum_{k=1}^8 \sin^2 \frac{k\pi}{18}$.

- Montrer que $A = 2$ (on pourra remarquer que $\frac{7\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8} = \pi - \frac{3\pi}{8}$ et $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$).
- Montrer que $B = 4$.

Solution

1. $\cos^2 \frac{7\pi}{8} = \cos^2 \frac{\pi}{8}$, $\cos^2 \frac{5\pi}{8} = \cos^2 \frac{3\pi}{8} = \sin^2 \frac{\pi}{8}$. Donc $A = 2 \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} \right) = 2$.

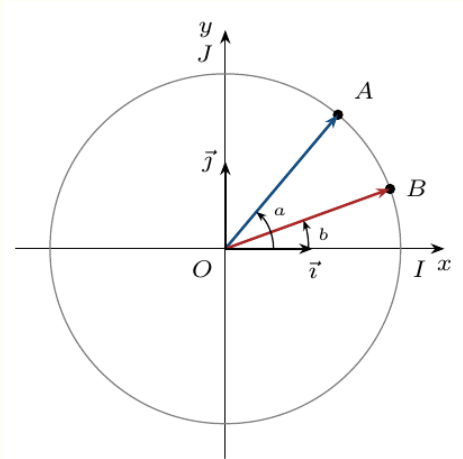
2. Pour $k \in \{1; \dots; 4\}$, $\frac{(9-k)\pi}{18} = \frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{18}$, donc $\sin^2 \frac{(9-k)\pi}{18} = \cos^2 \frac{k\pi}{18}$. En regroupant les termes d'indices k et $9 - k$: $B = \sum_{k=1}^4 \left(\sin^2 \frac{k\pi}{18} + \cos^2 \frac{k\pi}{18} \right) = 4$.

II. Formules d'addition et de duplication

1. Activité

Activité 1

- Montrer que les propositions « $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) \cos(x + y) = \cos x + \cos y$ » et « $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) \sin(x + y) = \sin x + \sin y$ » sont fausses.
- Soient a, b deux réels et A, B les points de $(\mathcal{C})$ tels que $(\vec{i}; \widehat{\vec{OA}}) \equiv a [2\pi]$ et $(\vec{i}; \widehat{\vec{OB}}) \equiv b [2\pi]$.
 - Montrer que $(\widehat{\vec{OB}; \vec{OA}}) \equiv a - b [2\pi]$, puis que $\vec{OB} \cdot \vec{OA} = \cos(a - b)$.
 - Vérifier que $\vec{OA} = \cos a \vec{i} + \sin a \vec{j}$ et $\vec{OB} = \cos b \vec{i} + \sin b \vec{j}$.
 - En déduire que $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, puis l'expression de $\cos(a + b)$ (avec $a + b = a - (-b)$).
 - En utilisant $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, en déduire $\sin(a - b)$ et $\sin(a + b)$.
 - En déduire $\cos 2a$ et $\sin 2a$.



Solution

- Pour $x = y = \frac{\pi}{2}$: $\cos \pi = -1 \neq 0 = \cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2}$ et $\sin \pi = 0 \neq 2$.
- a. Chasles : $(\widehat{\vec{OB}; \vec{OA}}) \equiv (\widehat{\vec{OB}; \vec{i}}) + (\widehat{\vec{i}; \vec{OA}}) \equiv -b + a [2\pi]$. Comme $OA = OB = 1$: $\vec{OB} \cdot \vec{OA} = 1 \times 1 \times \cos(a - b)$.
 - Ce sont les coordonnées d'un point du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne a (resp. b).
 - Dans la base orthonormée : $\vec{OB} \cdot \vec{OA} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. Puis $\cos(a + b) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
 - $\sin(a - b) = \cos((\frac{\pi}{2} - a) + b) = \cos(\frac{\pi}{2} - a) \cos b - \sin(\frac{\pi}{2} - a) \sin b = \sin a \cos b - \cos a \sin b$, puis $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ (remplacer b par $-b$).
 - Avec $b = a$: $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ et $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

2. Formules

Propriété 1 : formules d'addition et de duplication

Pour tous réels a et b :

- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$;
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$;
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$;
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$;
- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

Exemple 1

- Vérifier que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.
- Calculer $\cos \frac{7\pi}{12}$, $\sin \frac{7\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

2. a. En remarquant que $\frac{3\pi}{4} = 2 \times \frac{3\pi}{8}$, montrer que $\cos \frac{3\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{3\pi}{8} - 1$.
- b. En déduire que $\cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
- c. Montrer de deux manières que $\sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.
- d. Vérifier que $\sin \frac{3\pi}{4} = 2 \sin \frac{3\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8}$.

Solution

1. a. $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi+3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$ et $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.
- b. $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; $\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
2. a. Formule 5 avec $a = \frac{3\pi}{8}$.
- b. $2 \cos^2 \frac{3\pi}{8} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\cos^2 \frac{3\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$; or $\frac{3\pi}{8} \in]0; \frac{\pi}{2}[$, donc $\cos \frac{3\pi}{8} > 0$ et $\cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
- c. *Méthode 1* : $\sin^2 \frac{3\pi}{8} = 1 - \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{3\pi}{8} > 0$. *Méthode 2* : $\cos \frac{3\pi}{4} = 1 - 2 \sin^2 \frac{3\pi}{8}$ donne $\sin^2 \frac{3\pi}{8} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.
- d. $2 \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{4-2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{3\pi}{4}$.

Application 1

Soient $a \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et $b \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$ tels que $\cos a = \frac{3}{5}$ et $\sin b = \frac{5}{13}$. Calculer $\sin a$, $\cos b$, puis $\cos(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\sin 2a$ et $\cos 2b$.

Solution

$\sin a = \frac{4}{5}$ ($\sin a > 0$) et $\cos b = -\frac{12}{13}$ ($\cos b < 0$). Puis $\cos(a+b) = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = -\frac{56}{65}$; $\sin(a-b) = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} = -\frac{63}{65}$; $\sin 2a = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$; $\cos 2b = 1 - 2 \cdot \frac{25}{169} = \frac{119}{169}$.

III. Tangente et formules de linéarisation**1. Activité****Activité 2**

Soient a et b deux réels.

1. Montrer que $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ et $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$.
2. On suppose que a , b , $a+b$ et $a-b$ n'appartiennent pas à $\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- a. En divisant numérateur et dénominateur de $\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$ par $\cos a \cos b$, montrer que $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.
- b. En déduire $\tan(a-b)$, puis $\tan 2a$ lorsque de plus $2a \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Solution

1. De $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$.
2. a. $\cos a \cos b \neq 0$ et $\tan(a+b) = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ (le dénominateur vaut $\frac{\cos(a+b)}{\cos a \cos b} \neq 0$).
- b. En remplaçant b par $-b$ ($\tan$ est impaire) : $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$; avec $b = a$: $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$.

2. Formules

Propriété 2

Pour tout réel a : 7. $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$ 8. $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$.

Si $a, b, a + b, a - b$ ne sont pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) :

9. $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$; 10. $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.

Si a et $2a$ ne sont pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$: 11. $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$.

Exemple 2

- Calculer $\tan \frac{7\pi}{12}$, puis $\tan \frac{3\pi}{8}$ (on posera $t = \tan \frac{3\pi}{8}$ et on utilisera $\tan \frac{3\pi}{4}$).
- a. Montrer que, pour tout réel x : $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$ et $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$.
b. Montrer de deux manières que, pour tout réel x : $(1 - \cos x)(1 + \cos x) = 4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}$.

Solution

- $\tan \frac{7\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{1 - 3} = -(2 + \sqrt{3})$. Ensuite $\frac{3\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $\tan \frac{3\pi}{4} = -1 = \frac{2t}{1 - t^2}$, d'où $t^2 - 2t - 1 = 0$ et $t \in \{1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}$; comme $\frac{3\pi}{8} \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $t > 0$: $\tan \frac{3\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$.
- a. Formules 7 et 8 avec $a = \frac{x}{2}$.
b. *Méthode 1* : $(1 - \cos x)(1 + \cos x) = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \times 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ d'après a. *Méthode 2* : $(1 - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x = (2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2})^2$.

Application 2 : linéarisation

Montrer que, pour tout réel x : $\cos^4 x = \frac{3 + 4 \cos 2x + \cos 4x}{8}$.

Solution

$$\cos^4 x = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x}{4} = \frac{1 + 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}}{4} = \frac{3 + 4 \cos 2x + \cos 4x}{8}.$$

IV. Des produits aux sommes, et réciproquement

1. Activité

Activité 3

Soient a et b deux réels.

- En ajoutant ou en soustrayant les formules d'addition, montrer que $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b))$, $\sin a \sin b = -\frac{1}{2}(\cos(a + b) - \cos(a - b))$ et $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b))$.
- On pose $p = a + b$ et $q = a - b$. Vérifier que $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$, puis en déduire les quatre formules de transformation d'une somme en produit.

Solution

- $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$; $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin a \sin b$; $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$.
- $p + q = 2a$ et $p - q = 2b$. En reportant dans les égalités de 1 : $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$, $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$, $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$; enfin $\sin p - \sin q = \sin p + \sin(-q) = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$.

2. Formules

Propriété 3 : produits en sommes (12) et sommes en produits (13)

Pour tous réels a, b, p, q :

Produits $\rightarrow$ sommes	Sommes $\rightarrow$ produits
$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$	$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$
$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$	$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$
$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$	$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$
$\cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$	$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

Exemple 3

- Pour $x \in \mathbb{R}$, transformer en sommes : $A(x) = \cos x \cos 3x$, $B(x) = \sin 3x \cos 5x$, $C(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6}) \sin(x - \frac{\pi}{6})$, $D(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4}) \sin(x - \frac{\pi}{4})$.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, transformer en produits : $E(x) = \cos 2x - \cos 6x$, $F(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$, $G(x) = 1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x$.
- Montrer, sans calculatrice, que $\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solution

- $A(x) = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)$; $B(x) = \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x)$; $C(x) = -\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x$; $D(x) = \frac{1}{2}(\sin 2x - \sin \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}(\sin 2x - 1)$.
- $E(x) = -2 \sin 4x \sin(-2x) = 2 \sin 4x \sin 2x$. $F(x) = (\cos x + \cos 3x) + \cos 2x = 2 \cos 2x \cos x + \cos 2x = \cos 2x(2 \cos x + 1)$. $G(x) = (1 + \cos 6x) + (\cos 2x + \cos 4x) = 2 \cos^2 3x + 2 \cos 3x \cos x = 2 \cos 3x(\cos 3x + \cos x) = 4 \cos 3x \cos 2x \cos x$.
- $\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{7\pi}{12} = 2 \cos \frac{\pi}{3} \cos(-\frac{\pi}{4}) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

V. Transformation de $a \cos x + b \sin x$

1. Activité

Activité 4

Soient a et b deux réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$; on pose $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = a \cos x + b \sin x$.

- Vérifier que $A(x) = r \left(\frac{a}{r} \cos x + \frac{b}{r} \sin x \right)$ et que $\left(\frac{a}{r} \right)^2 + \left(\frac{b}{r} \right)^2 = 1$.
- En déduire qu'il existe un réel α tel que $\cos \alpha = \frac{a}{r}$ et $\sin \alpha = \frac{b}{r}$, puis que $A(x) = r \cos(x - \alpha)$.

Solution

- $r > 0$ et $\frac{a^2+b^2}{r^2} = 1$.
- Le point $M\left(\frac{a}{r}; \frac{b}{r}\right)$ est sur le cercle trigonométrique : il a une abscisse curviligne α . Alors $A(x) = r(\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x) = r \cos(x - \alpha)$.

2. Propriété

Propriété 4 (formule 14)

Soient a, b deux réels non tous deux nuls. Il existe un réel α tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \alpha), \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \alpha = \frac{a}{r}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{r}.$$

Remarque — conséquences

- On peut aussi écrire $a \cos x + b \sin x = r \sin(x + \beta)$ avec $\cos \beta = \frac{b}{r}$ et $\sin \beta = \frac{a}{r}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R} : -r \leq a \cos x + b \sin x \leq r$, et les deux bornes sont atteintes (pour $x = \alpha$ et $x = \alpha + \pi$).
- L'équation $a \cos x + b \sin x = c$ admet des solutions si et seulement si $|c| \leq r$.

Exemple 4

- Écrire sous la forme $r \cos(x - \alpha)$, avec $r > 0$: $A(x) = \sqrt{3} \cos x + \sin x$ et $B(x) = \cos x - \sin x$.
- Montrer que, pour tout réel x :
 - $\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{2} \iff \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{4}$;
 - $\cos 3x + \sqrt{3} \sin 3x = -1 \iff \cos(3x - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{2\pi}{3}$.

Solution

- $A : r = 2, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \alpha = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{\pi}{6} : A(x) = 2 \cos(x - \frac{\pi}{6})$. $B : r = \sqrt{2}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha = -\frac{\pi}{4} : B(x) = \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})$.
- $\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{2} \iff 2 \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{2} \iff \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$.
 - $\cos 3x + \sqrt{3} \sin 3x = 2 \cos(3x - \frac{\pi}{3})$ (même calcul avec $a = 1, b = \sqrt{3}, \alpha = \frac{\pi}{3}$, appliqué à $3x$). Donc l'équation équivaut à $\cos(3x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$.

VI. Équations et inéquations trigonométriques**1. Équations de référence****Propriété 5 (formule 15)**

Pour tout réel α :

- $\cos x = \cos \alpha \iff x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
- $\sin x = \sin \alpha \iff x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
- si $\alpha \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} : \tan x = \tan \alpha \iff x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Remarque — cas particuliers

$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\sin x = 0 \iff x = k\pi$; $\cos x = 1 \iff x = 2k\pi$; $\sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Si $|c| > 1$, les équations $\cos x = c$ et $\sin x = c$ n'ont pas de solution.

Exemple 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- $(E_1) : \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $(E_2) : \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $(E_3) : \tan x = \sqrt{3}$.
- $(E_4) : \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $(E_5) : \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $(E_6) : \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Solution

- $S_1 = \{\pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $S_2 = \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $S_3 = \{\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{3\pi}{4} : S_4 = \{\pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{3}) : S_5 = \{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
 $-\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan(-\frac{\pi}{6}) : S_6 = \{-\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exemple 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $] -\pi; \pi]$, l'équation $(E_7) : \cos 3x = \sin(x + \frac{\pi}{6})$.

Solution

$\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{3} - x)$. Donc $(E_7) \iff 3x = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi$ ou $3x = -\frac{\pi}{3} + x + 2k\pi \iff x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
 Dans $] -\pi; \pi]$: $-\pi < \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \leq \pi \iff -\frac{13}{6} < k \leq \frac{11}{6} \iff k \in \{-2; -1; 0; 1\}$, et $-\pi < -\frac{\pi}{6} + k\pi \leq \pi \iff$

$k \in \{0; 1\}$. Ensemble des solutions : $\left\{-\frac{11\pi}{12}; -\frac{5\pi}{12}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{12}; \frac{5\pi}{6}\right\}$.

2. Inéquations

Méthode — résoudre une inéquation sur un intervalle (formule 16)

1. Résoudre l'équation associée et placer sur le cercle trigonométrique les points correspondants, ainsi que les extrémités de l'intervalle d'étude.
2. Repérer l'arc (ou les arcs) où l'inégalité est vraie : pour $\cos x \geq c$, les points d'abscisse $\geq c$; pour $\sin x \geq c$, les points d'ordonnée $\geq c$; pour $\tan$, on lit sur l'axe des tangentes en excluant $\frac{\pi}{2} + k\pi$.
3. Traduire les arcs en intervalles contenus dans l'intervalle d'étude (attention aux extrémités).

Exemple 7

Résoudre dans $I =]-\pi; \pi]$:

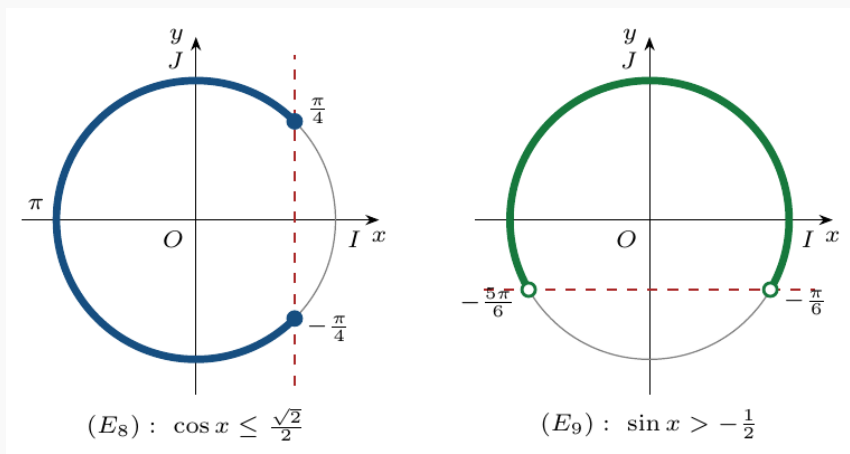
1. $(E_8) : \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; $(E_9) : \sin x > -\frac{1}{2}$; $(E_{10}) : \tan x < 1$;
2. $(E_{11}) : (2 \cos x - 1)(2 \sin x + \sqrt{3}) < 0$; $(E_{12}) : -\sqrt{3} \leq \tan x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Solution

1. $(E_8) : S_8 =]-\pi; -\frac{\pi}{4}] \cup [\frac{\pi}{4}; \pi]$. $(E_9) : \sin x = -\frac{1}{2}$ pour $x \in \left\{-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right\}$ et $S_9 =]-\pi; -\frac{5\pi}{6}[\cup]-\frac{\pi}{6}; \pi]$. (E_{10}) : sur chaque intervalle où $\tan$ est définie, $\tan x < 1 \iff x < \frac{\pi}{4} + k\pi$; $S_{10} =]-\pi; -\frac{3\pi}{4}[\cup]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{2}; \pi]$.
2. $(E_{11}) : 2 \cos x - 1 > 0 \iff x \in]-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}[$ et $2 \sin x + \sqrt{3} > 0 \iff x \in]-\pi; -\frac{2\pi}{3}[\cup]-\frac{\pi}{3}; \pi]$. Tableau de signes sur I (valeurs remarquables $-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$) :

x	$] -\pi; -\frac{2\pi}{3}[$	$] -\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}[$	$] -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}[$	$] \frac{\pi}{3}; \pi]$
$2 \cos x - 1$	—	—	+	—
$2 \sin x + \sqrt{3}$	+	—	+	+
produit	—	+	+	—

$S_{11} =]-\pi; -\frac{2\pi}{3}[\cup]\frac{\pi}{3}; \pi]$. (E_{12}) : sur chaque intervalle $] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$, $\tan$ est strictement croissante et $-\sqrt{3} \leq \tan x \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \iff x \in [-\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi]$. Pour $k \in \{-1; 0; 1\}$ et en se restreignant à I : $S_{12} =]-\pi; -\frac{5\pi}{6}] \cup [-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{2\pi}{3}; \pi]$.



Exemple 8

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0; 2\pi]$, l'équation $\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{2}$.
2. Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation $\sqrt{3} \cos x + \sin x > \sqrt{2}$.

Solution

1. D'après l'exemple 4 : $\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{2} \iff \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \iff x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Dans $[0; 2\pi]$: $\left\{\frac{5\pi}{12}; \frac{23\pi}{12}\right\}$.
2. L'inéquation équivaut à $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pour $x \in [0; 2\pi]$, on pose $X = x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$; sur cet intervalle, $\cos X > \frac{\sqrt{2}}{2} \iff X \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left[\frac{7\pi}{4}; \frac{11\pi}{6}\right]$. D'où $S = \left[0; \frac{5\pi}{12}\right[\cup \left[\frac{23\pi}{12}; 2\pi\right]$.

Résumé : trigonométrie

N°	Formule
1–2	$\cos(a \mp b) = \cos a \cos b \pm \sin a \sin b$
3–4	$\sin(a \mp b) = \sin a \cos b \mp \cos a \sin b$
5	$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
6	$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
7–8	$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}, \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$
9–10	$\tan(a \mp b) = \frac{\tan a \mp \tan b}{1 \pm \tan a \tan b}$
11	$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$
12	$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)), \text{ etc.}$
13	$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, \text{ etc.}$
14	$a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \alpha), r = \sqrt{a^2 + b^2}$
15	$\cos x = \cos \alpha \iff x = \pm \alpha + 2k\pi$
15	$\tan x = \tan \alpha \iff x = \alpha + k\pi$
15	$\sin x = \sin \alpha \iff x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } \pi - \alpha + 2k\pi$
16	inéquation : cercle trigonométrique, arcs, intervalle