

Cours — Chapitre 07

Suites numériques

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Suites numériques : définition, raisonnement par récurrence, suites majorées, minorées, bornées — II. Monotonie d’une suite numérique — III. Suites arithmétiques (définition, terme général, somme de termes consécutifs, propriété caractéristique) — IV. Suites géométriques (définition, terme général, somme de termes consécutifs, propriété caractéristique) — V. Exercices de synthèse — Résumé.

Cadre. I désigne une partie de $\mathbb{N}$ de la forme $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq p\}$ ($p \in \mathbb{N}$). Les suites étudiées sont à valeurs réelles. Dans les solutions, le symbole $\iff$ n’est écrit que lorsque chaque étape est réversible ; sinon on écrit $\implies$.

I. Suites numériques : définition et bornes

1. Activité d’introduction

Activité 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{N}$ par $f(x) = 6x + \frac{1}{3}$ (la variable ne prend que des valeurs entières naturelles).

- Calculer, lorsque c’est possible, $f(0)$, $f(2)$, $f\left(\frac{1}{6}\right)$, $f(-3)$.
- Exprimer $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, puis $f(n+1) - f(n)$.

Solution

- $f(0) = \frac{1}{3}$ et $f(2) = 12 + \frac{1}{3} = \frac{37}{3}$. En revanche $\frac{1}{6} \notin \mathbb{N}$ et $-3 \notin \mathbb{N} : f\left(\frac{1}{6}\right)$ et $f(-3)$ **ne sont pas définis**, car f n’est définie que sur $\mathbb{N}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 6n + \frac{1}{3}$ et $f(n+1) - f(n) = 6(n+1) - 6n = 6$.

2. Définition d’une suite numérique

Définition 1 : suite numérique

- On appelle **suite numérique** toute fonction u définie sur $\mathbb{N}$, ou sur une partie I de $\mathbb{N}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- L’image d’un entier $n \in I$ par u est notée u_n (lire « u indice n ») plutôt que $u(n)$; u_n est le **terme général** (ou terme de rang n) de la suite.

Remarque 1 : notations

- La suite u définie sur I est notée $(u_n)_{n \in I}$; si $I = \mathbb{N}$, on écrit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_n)_{n \geq 0}$ ou simplement (u_n) ; si $I = \mathbb{N}^*$, on écrit $(u_n)_{n \geq 1}$.
- Il ne faut pas confondre u_{n+1} (terme de rang $n+1$) et $u_n + 1$ (terme de rang n augmenté de 1), ni u_{2n} et $2u_n$.

Exemple 1 : suite définie par une formule explicite

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{3n+2}{4n+1}$.

- Calculer u_0 , u_1 , u_2 et u_3 .
- Exprimer u_{n+1} en fonction de n , pour $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq 2$.

Solution

- $u_0 = \frac{2}{1} = 2$, $u_1 = \frac{5}{5} = 1$, $u_2 = \frac{8}{9}$, $u_3 = \frac{11}{13}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{3(n+1)+2}{4(n+1)+1} = \frac{3n+5}{4n+5}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $3n+2 > 0$ et $4n+1 > 0$, donc $u_n > 0$. De plus $2 - u_n = \frac{2(4n+1) - (3n+2)}{4n+1} = \frac{5n}{4n+1} \geq 0$, donc $u_n \leq 2$.

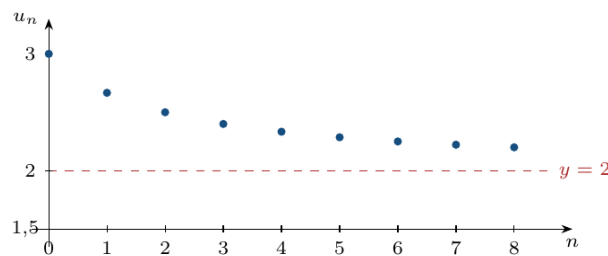
Exemple 2 : suite définie par récurrence

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4 - \frac{4}{u_n}$.

- Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 (on admet provisoirement que les termes sont non nuls).
- Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$ (ce qui justifie que u_{n+1} est bien défini).

Solution

- $u_1 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$; $u_2 = 4 - \frac{4}{\frac{8}{3}} = \frac{5}{2}$; $u_3 = 4 - \frac{4}{\frac{5}{2}} = \frac{12}{5}$; $u_4 = 4 - \frac{4}{\frac{12}{5}} = \frac{7}{3}$.
- Initialisation* : $u_0 = 3 \geq 2$. *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 2$. Alors $u_n > 0$, u_{n+1} est défini et $u_{n+1} - 2 = 2 - \frac{4}{u_n} = \frac{2(u_n - 2)}{u_n} \geq 0$ (numérateur ≥ 0 , dénominateur > 0). Donc $u_{n+1} \geq 2$. *Conclusion* : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$.



Remarque 2 : modes de définition d'une suite

Une suite $(u_n)_{n \in I}$ peut être définie :

- **par une formule explicite** : $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie (au moins) sur I ; on calcule directement n'importe quel terme;
- **par récurrence** : on donne le (ou les) premier(s) terme(s) et une relation qui permet de calculer chaque terme à partir du (ou des) précédent(s), par exemple $u_{n+1} = g(u_n)$ ou $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Pour calculer u_{10} , il faut en général calculer les termes précédents. Il faut aussi s'assurer que chaque terme est **bien défini** (dénominateur non nul, radicande positif...).

3. Raisonnement par récurrence

Propriété — principe de récurrence

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une proposition qui dépend de l'entier $n \geq p$. Si

- **(initialisation)** $P(p)$ est vraie, et
 - **(hérédité)** pour tout entier $n \geq p$, $P(n) \implies P(n+1)$,
- alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq p$.

Méthode — rédiger une récurrence

- Énoncer clairement la proposition $P(n)$ et l'ensemble des entiers concernés.
- Vérifier $P(p)$.
- Fixer un entier $n \geq p$, **supposer** $P(n)$ (hypothèse de récurrence) et démontrer $P(n+1)$.
- Conclure : « d'après le principe de récurrence, pour tout $n \geq p$, $P(n)$ ».

Exemple 3

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est divisible par 6.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Soit a un réel positif. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1+na$ (inégalité de Bernoulli).

Solution

1. $P(n)$: « 6 divise $7^n - 1$ ». $P(0)$: $7^0 - 1 = 0 = 6 \times 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $7^n - 1 = 6q$ avec $q \in \mathbb{N}$. Alors $7^{n+1} - 1 = 7(7^n - 1) + 6 = 6(7q + 1)$: $P(n+1)$ est vraie. Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $6 \mid 7^n - 1$.
2. Pour $n = 1$: $1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que l'égalité soit vraie. Alors $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, qui est l'égalité au rang $n+1$.
3. Pour $n = 0$: $1 \geq 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(1+a)^n \geq 1+na$. Comme $1+a > 0$: $(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$.

4. Suites majorées, minorées, bornées**Définition 2**

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique.

- $(u_n)_{n \in I}$ est **majorée** s'il existe un réel M tel que : $(\forall n \in I) u_n \leq M$ (M est un majorant).
- $(u_n)_{n \in I}$ est **minorée** s'il existe un réel m tel que : $(\forall n \in I) u_n \geq m$ (m est un minorant).
- $(u_n)_{n \in I}$ est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire s'il existe un réel $K \geq 0$ tel que $(\forall n \in I) |u_n| \leq K$.

Exemple 4

- La suite de l'exemple 1 est bornée : $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 < u_n \leq 2$.
- La suite de l'exemple 2 est minorée par 2.
- La suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = (-1)^n n$ n'est ni majorée ni minorée : $w_{2n} = 2n$ dépasse tout réel donné et $w_{2n+1} = -(2n+1)$ devient inférieur à tout réel donné.

Remarque 3

Un majorant (resp. minorant) n'est pas unique : si M majore (u_n) , tout réel $M' \geq M$ la majore aussi. Pour montrer que (u_n) est majorée par M , on étudie le signe de $M - u_n$, ou l'on procède par récurrence (suites récurrentes), ou l'on utilise des encadrements.

Application 1

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{5n-1}{n+2}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 5 - \frac{11}{n+2}$.
2. En déduire que (v_n) est bornée, en précisant un majorant et un minorant.

Solution

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $5 - \frac{11}{n+2} = \frac{5n+10-11}{n+2} = \frac{5n-1}{n+2} = v_n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$: $n+2 \geq 2$, donc $0 < \frac{11}{n+2} \leq \frac{11}{2}$, puis $5 - \frac{11}{2} \leq v_n < 5$. Ainsi $(\forall n \in \mathbb{N}) -\frac{1}{2} \leq v_n < 5$: la suite est majorée par 5, minorée par $-\frac{1}{2}$ (atteint pour $n=0$), donc bornée.

II. Monotonie d'une suite numérique

1. Définitions

Définition 3

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique.

- $(u_n)_{n \in I}$ est **croissante** si : $(\forall n, m \in I) \quad n > m \implies u_n \geq u_m$; **strictement croissante** si $n > m \implies u_n > u_m$.
- $(u_n)_{n \in I}$ est **décroissante** si : $(\forall n, m \in I) \quad n > m \implies u_n \leq u_m$; **strictement décroissante** si $n > m \implies u_n < u_m$.
- $(u_n)_{n \in I}$ est **constante** si : $(\forall n, m \in I) \quad u_n = u_m$.
- Une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**.

Remarque 4

- Si $(u_n)_{n \geq p}$ est croissante, alors $(\forall n \geq p) \quad u_n \geq u_p$: elle est **minorée par son premier terme**.
- Si $(u_n)_{n \geq p}$ est décroissante, alors $(\forall n \geq p) \quad u_n \leq u_p$: elle est **majorée par son premier terme**.
- Une suite peut n'être ni croissante ni décroissante : c'est le cas de $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Caractérisation et méthodes

Propriété 1

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique.

- $(u_n)_{n \in I}$ est croissante $\iff (\forall n \in I) \quad u_{n+1} \geq u_n$;
- $(u_n)_{n \in I}$ est décroissante $\iff (\forall n \in I) \quad u_{n+1} \leq u_n$;
- $(u_n)_{n \in I}$ est constante $\iff (\forall n \in I) \quad u_{n+1} = u_n$.

Les mêmes équivalences sont vraies avec des inégalités strictes pour la stricte monotonie.

Remarque — démonstration du premier point

Le sens direct s'obtient avec $m = n$ et $n + 1 > n$. Réciproquement, si $u_{k+1} \geq u_k$ pour tout $k \in I$, alors pour $n > m$ dans I : $u_n - u_m = \sum_{k=m}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \geq 0$.

Méthode — étudier la monotonie

1. **Signe de la différence** : étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in I$.
2. **Comparaison du quotient à 1** : si tous les termes sont **strictement positifs**, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 (≥ 1 : croissante ; ≤ 1 : décroissante).
3. **Formule explicite** : si $u_n = f(n)$ avec f monotone sur $[p; +\infty[$ (variations connues par le chapitre sur les fonctions), alors $(u_n)_{n \geq p}$ a la même monotonie que f .
4. **Suite récurrente** : on démontre souvent l'inégalité $u_{n+1} \leq u_n$ (ou $\geq$) par récurrence, ou l'on factorise $u_{n+1} - u_n$ après avoir encadré u_n .

Exemple 5

Étudier la monotonie des suites suivantes :

1. (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -4n + 7$;
2. $(v_n)_{n \geq 1}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \frac{3n-2}{n}$;
3. $(w_n)_{n \geq 1}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $w_n = \frac{n}{2^n}$.

Solution

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -4 < 0$: (u_n) est strictement décroissante.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 3 - \frac{2}{n}$, donc $v_{n+1} - v_n = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} = \frac{2}{n(n+1)} > 0$: $(v_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n > 0$ et $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{n+1}{2n}$. Or $\frac{n+1}{2n} \leq 1 \iff n+1 \leq 2n \iff n \geq 1$: c'est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc $(w_n)_{n \geq 1}$ est décroissante (elle n'est pas strictement décroissante car $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$).

Exemple 6

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = \frac{1}{8}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n^2 + \frac{1}{2}v_n$.

1. Calculer v_1 et v_2 .
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n < \frac{1}{4}$.
3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = 2v_n \left(v_n - \frac{1}{4}\right)$.
4. En déduire la monotonie de (v_n) .

Solution

1. $v_1 = 2 \times \frac{1}{64} + \frac{1}{16} = \frac{3}{32}$; $v_2 = 2 \times \frac{9}{1024} + \frac{3}{64} = \frac{66}{1024} = \frac{33}{512}$.
2. $P(0) : 0 < \frac{1}{8} < \frac{1}{4}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < v_n < \frac{1}{4}$. On a $v_{n+1} = v_n \left(2v_n + \frac{1}{2}\right)$ avec $v_n > 0$ et $\frac{1}{2} < 2v_n + \frac{1}{2} < 1$.
Donc $v_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} < v_n \times 1 < \frac{1}{4}$.
3. $v_{n+1} - v_n = 2v_n^2 - \frac{1}{2}v_n = 2v_n \left(v_n - \frac{1}{4}\right)$.
4. D'après 2, $v_n > 0$ et $v_n - \frac{1}{4} < 0 : v_{n+1} - v_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (v_n) est strictement décroissante.

Application 2

On considère la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.
2. En déduire que (a_n) est strictement décroissante et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leq 1$.

Solution

1. $a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.
2. La suite $(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ est strictement croissante et à termes strictement positifs (somme de deux suites strictement croissantes, la racine carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$); son inverse (a_n) est donc strictement décroissante. Ainsi $0 < a_n \leq a_0 = 1$.

III. Suites arithmétiques**1. Définition****Définition 4**

Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que : $(\forall n \in I) u_{n+1} - u_n = r$, c'est-à-dire $u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r est la **raison** de la suite.

Exemple 7

1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 7 - 3n$. Montrer que (u_n) est arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.
2. On considère la suite (s_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $s_n = n^2$. Montrer que (s_n) n'est pas arithmétique.

Solution

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 7 - 3(n+1) - 7 + 3n = -3$: suite arithmétique de raison $r = -3$ et de premier terme $u_0 = 7$.
2. $s_1 - s_0 = 1$ et $s_2 - s_1 = 3$: la différence de deux termes consécutifs n'est pas constante.

2. Terme général**Propriété 2**

Si $(u_n)_{n \in I}$ est arithmétique de raison r , alors pour tous $n, p \in I$: $u_n = u_p + (n-p)r$. En particulier $u_n = u_0 + nr$ ($n \in \mathbb{N}$) et $u_n = u_1 + (n-1)r$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Remarque — démonstration

Pour $n \geq p$: $u_n - u_p = \sum_{k=p}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = (n - p)r$. Pour $n < p$, on échange les rôles de n et p .

Exemple 8

On considère une suite arithmétique (u_n) telle que $u_3 = 10$ et $u_8 = 25$. Déterminer sa raison r , son premier terme u_0 et l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Solution

$u_8 = u_3 + 5r$, donc $5r = 15$ et $r = 3$. Puis $u_0 = u_3 - 3r = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 3n$.

3. Somme de termes consécutifs**Propriété 3**

Si $(u_n)_{n \in I}$ est arithmétique et $p \in I$, alors pour tout $n \geq p$:

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2},$$

c'est-à-dire (nombre de termes) $\times$ $\frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$. En particulier $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Remarque — démonstration (méthode de Gauss)

On note S la somme et on l'écrit dans les deux sens : $2S = \sum_{k=p}^n (u_k + u_{n+p-k})$. Or $u_k + u_{n+p-k} = u_p + (k-p)r + u_p + (n-k)r = u_p + u_n$: chacun des $n - p + 1$ termes vaut $u_p + u_n$.

Exemple 9

On reprend la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 7 - 3n$. Calculer $\sum_{k=0}^9 u_k$.

Solution

Il y a 10 termes, $u_0 = 7$ et $u_9 = -20$: $\sum_{k=0}^9 u_k = 10 \times \frac{7 - 20}{2} = -65$.

Exemple 10 : suite homographique et suite arithmétique auxiliaire

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n - 4}{u_n - 1}$.

- Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$ (donc $u_n \neq 1$ et u_{n+1} est défini). Calculer u_1 et u_2 .
- On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$.
 - Montrer que (v_n) est arithmétique et préciser sa raison.
 - Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
 - Exprimer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$.

Solution

- $u_0 = 3 > 2$. Si $u_n > 2$, alors $u_n - 1 > 0$ et $u_{n+1} - 2 = \frac{3u_n - 4 - 2u_n + 2}{u_n - 1} = \frac{u_n - 2}{u_n - 1} > 0$. Donc $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis $u_1 = \frac{5}{2}$ et $u_2 = \frac{7/2}{3/2} = \frac{7}{3}$.
- a. $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 2} = \frac{u_n - 1}{u_n - 2} = \frac{(u_n - 2) + 1}{u_n - 2} = 1 + v_n$: (v_n) est arithmétique de raison 1, et $v_0 = \frac{1}{3-2} = 1$.
 b. $v_n = 1 + n$; de $u_n - 2 = \frac{1}{v_n}$ on tire $u_n = 2 + \frac{1}{n+1} = \frac{2n+3}{n+1}$.

$$c. S_n = (n+1) \times \frac{v_0 + v_n}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

4. Propriété caractéristique

Propriété 4

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique. $(u_n)_{n \in I}$ est arithmétique $\iff (\forall n \in I) \ 2u_{n+1} = u_n + u_{n+2}$.

En particulier, trois réels a, b, c sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si $2b = a + c$.

Remarque — démonstration

$2u_{n+1} = u_n + u_{n+2} \iff u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$. Si cette égalité est vraie pour tout n , la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante (égale à $u_{p+1} - u_p$) ; la réciproque est immédiate.

Exemple 11

1. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2 + u_3 + u_4 = 27$. Calculer u_3 .
2. Déterminer trois réels a, b, c , termes consécutifs (dans cet ordre) d'une suite arithmétique, tels que $a + b + c = 12$ et $abc = 28$.

Solution

1. $u_2 + u_4 = 2u_3$, donc $3u_3 = 27$ et $u_3 = 9$.
2. $a + c = 2b$ donne $3b = 12$, $b = 4$. On note r la raison : $a = 4 - r$, $c = 4 + r$ et $abc = 4(16 - r^2) = 28 \iff r^2 = 9 \iff r \in \{-3; 3\}$. Solutions : $(a; b; c) = (1; 4; 7)$ ou $(7; 4; 1)$.

IV. Suites géométriques

1. Définition

Définition 5

Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est **géométrique** s'il existe un réel q tel que : $(\forall n \in I) \ u_{n+1} = q u_n$. Le réel q est la **raison** de la suite.

Exemple 12

1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{3^{n+1}}{2^n}$. Montrer que (u_n) est géométrique.
2. On considère la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = n 2^n$. Montrer que (t_n) n'est pas géométrique.

Solution

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{3^{n+2}}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} \times \frac{3^{n+1}}{2^n} = \frac{3}{2} u_n$: raison $q = \frac{3}{2}$, premier terme $u_0 = 3$.
2. $t_0 = 0$, $t_1 = 2$: si (t_n) était géométrique de raison q , on aurait $t_1 = q t_0 = 0$, ce qui est faux.

2. Terme général

Propriété 5

Si $(u_n)_{n \in I}$ est géométrique de raison q , alors pour tous $n, p \in I$ avec $n \geq p$: $u_n = u_p \times q^{n-p}$. En particulier $u_n = u_0 q^n$ ($n \in \mathbb{N}$) et $u_n = u_1 q^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Exemple 13

On considère une suite géométrique (v_n) telle que $v_2 = 12$ et $v_5 = -96$. Déterminer sa raison q , son premier terme v_0 et l'expression de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Solution

$v_5 = v_2 q^3$, donc $q^3 = -8$ et $q = -2$ (un réel a une unique racine cubique). Puis $v_2 = v_0 q^2 = 4v_0$ donne $v_0 = 3$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3(-2)^n$.

3. Somme de termes consécutifs**Propriété 6**

Si $(u_n)_{n \in I}$ est géométrique de raison $q \neq 1$ et $p \in I$, alors pour tout $n \geq p$:

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q},$$

c'est-à-dire (premier terme) $\times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$. Si $q = 1$, la somme vaut $(n - p + 1) u_p$.

Remarque — démonstration

Pour $q \neq 1$ et $m \in \mathbb{N}$: $(1 - q)(1 + q + \dots + q^m) = 1 - q^{m+1}$ (les termes se compensent). Il suffit de factoriser u_p : $\sum_{k=p}^n u_k = u_p \sum_{j=0}^{n-p} q^j$.

Exemple 14

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$ et $v_n = u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 , u_2 , v_0 et v_1 .
2. Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
3. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
4. Montrer que $\sum_{k=0}^{10} v_k = -3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{11}\right)$ et que $\sum_{k=0}^{10} u_k = 30 + 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{11}$.

Solution

1. $u_1 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$, $u_2 = \frac{14}{9} + 1 = \frac{23}{9}$, $v_0 = -1$, $v_1 = -\frac{2}{3}$.
2. $v_{n+1} = \frac{2}{3}u_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}(\frac{2}{3}u_n + 1) - 3 = \frac{2}{3}u_n - 3 = \frac{2}{3}v_n$.
3. $v_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $u_n = 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
4. $\sum_{k=0}^{10} v_k = v_0 \times \frac{1 - (2/3)^{11}}{1 - 2/3} = -3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{11}\right)$. Puis $\sum_{k=0}^{10} u_k = \sum_{k=0}^{10} (v_k + 3) = -3 + 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{11} + 33 = 30 + 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{11}$.

4. Propriété caractéristique**Propriété 7**

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite à termes **non nuls**. $(u_n)_{n \in I}$ est géométrique $\iff (\forall n \in I) \ u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2}$. En particulier, trois réels non nuls a, b, c sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si $b^2 = ac$.

Remarque — démonstration

Les termes étant non nuls, $u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} \iff \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n}$: le quotient de deux termes consécutifs est constant.

Exemple 15

Déterminer trois réels a, b, c , termes consécutifs (dans cet ordre) d'une suite géométrique, tels que $a + b + c = 21$ et $abc = 216$.

Solution

$b^2 = ac$ donne $b^3 = abc = 216$, donc $b = 6$. Avec la raison $q \neq 0$: $a = \frac{6}{q}$, $c = 6q$, et $\frac{6}{q} + 6 + 6q = 21 \iff 6q^2 - 15q + 6 = 0 \iff 2q^2 - 5q + 2 = 0 \iff q \in \left\{2; \frac{1}{2}\right\}$. Solutions : (3; 6; 12) ou (12; 6; 3).

V. Exercices de synthèse**Exercice d'application 1**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.
2. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 2}$.
b. En déduire la monotonie de (u_n) .
3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$.
a. Montrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
b. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$.
d. En déduire l'expression, en fonction de n , de $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3}{u_k + 1}$.

Solution

1. $u_0 = 3 > 2$; si $u_n > 2$, alors $u_n + 2 > 0$ et $u_{n+1} - 2 = \frac{u_n - 2}{u_n + 2} > 0$. Par récurrence, $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. a. $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n + 2} = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 2}$.
b. $2 - u_n < 0$, $u_n + 1 > 0$, $u_n + 2 > 0$: $u_{n+1} - u_n < 0$. La suite est strictement décroissante.
3. a. $u_{n+1} + 1 = \frac{4u_n + 4}{u_n + 2}$, donc $v_{n+1} = \frac{u_n - 2}{u_n + 2} \times \frac{u_n + 2}{4(u_n + 1)} = \frac{1}{4}v_n$: raison $\frac{1}{4}$, premier terme $v_0 = \frac{1}{4}$.
b. $v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$. De $v_n(u_n + 1) = u_n - 2$: $u_n(1 - v_n) = 2 + v_n$, et $v_n \neq 1$, donc $u_n = \frac{2 + v_n}{1 - v_n} = \frac{2 \times 4^{n+1} + 1}{4^{n+1} - 1}$.
c. $S_n = \frac{1}{4} \times \frac{1 - (1/4)^{n+1}}{1 - 1/4} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right)$.
d. $1 - v_k = \frac{(u_k + 1) - (u_k - 2)}{u_k + 1} = \frac{3}{u_k + 1}$, donc $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (1 - v_k) = n - S_n = n - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right)$.

Exercice d'application 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{5}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{6}{5 - u_n}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 < u_n < 3$.
2. Étudier la monotonie de (u_n) .
3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 3}$.
a. Montrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
b. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
c. Calculer la somme $T = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{u_k - 3}$.

Solution

1. $2 < \frac{5}{2} < 3$. Si $2 < u_n < 3$, alors $5 - u_n > 0$, $u_{n+1} - 2 = \frac{2(u_n - 2)}{5 - u_n} > 0$ et $u_{n+1} - 3 = \frac{3(u_n - 3)}{5 - u_n} < 0$. Par récurrence, $2 < u_n < 3$ pour tout n .

2. $u_{n+1} - u_n = \frac{6 - 5u_n + u_n^2}{5 - u_n} = \frac{(u_n - 2)(u_n - 3)}{5 - u_n} < 0 : (u_n)$ est strictement décroissante.
3. a. $v_{n+1} = \frac{2(u_n - 2)}{5 - u_n} \times \frac{5 - u_n}{3(u_n - 3)} = \frac{2}{3}v_n ; v_0 = \frac{1/2}{-1/2} = -1.$
 b. $v_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n ;$ de $v_n(u_n - 3) = u_n - 2 : u_n = \frac{3v_n - 2}{v_n - 1} = \frac{2 + 3(2/3)^n}{1 + (2/3)^n}.$
 c. $v_k = 1 + \frac{1}{u_k - 3},$ donc $\frac{1}{u_k - 3} = v_k - 1$ et $T = \sum_{k=1}^{10} v_k - 10 = -\frac{2}{3} \times \frac{1 - (2/3)^{10}}{1/3} - 10 = -12 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^{10}.$

Exercice d'application 3

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $a_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k+1}$ et $b_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$

1. Montrer que la suite (a_n) est croissante.
2. Montrer que la suite (b_n) est décroissante.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n < b_n.$
4. En déduire que (a_n) est majorée et que (b_n) est minorée.

Solution

1. $a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+4} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+4} = \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} > 0.$
2. $b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} = -\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} < 0.$
3. $b_n - a_n = -\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} = \frac{1}{2n+2} > 0.$
4. $a_n < b_n \leq b_0 = 1 : (a_n)$ est majorée par 1. $b_n > a_n \geq a_0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} : (b_n)$ est minorée par $\frac{1}{2}.$

Exercice d'application 4

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$

1. Vérifier que, pour tout $k \in \{n; \dots; 2n\}, \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n},$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \frac{n+1}{2n} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n}.$
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = -\frac{3n+2}{n(2n+1)(2n+2)},$ et en déduire que $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Solution

1. Pour $n \leq k \leq 2n : \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n}.$ La somme comporte $2n - n + 1 = n + 1$ termes : $(n+1)\frac{1}{2n} \leq u_n \leq (n+1)\frac{1}{n}.$
2. $u_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k},$ donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \frac{n(2n+2) + n(2n+1) - (2n+1)(2n+2)}{n(2n+1)(2n+2)} = \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)} < 0.$

Exercice d'application 5

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_1 = 1, u_2 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n.$ On admet que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}.$

1. Calculer u_3, u_4 et $v_1.$
2. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = 4 - \frac{3}{v_n}.$
3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 1 < v_n < 3.$
4. Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
5. On considère la suite $(t_n)_{n \geq 1}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $t_n = \frac{v_n - 3}{v_n - 1}.$

- a. Montrer que $(t_n)_{n \geq 1}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
- b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{3^n + 1}{3^{n-1} + 1}$.
6. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1 + 3^{n-1}}{2}$.

Solution

1. $u_3 = 8 - 3 = 5$, $u_4 = 20 - 6 = 14$, $v_1 = \frac{u_2}{u_1} = 2$.
2. $v_{n+1} = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{4u_{n+1} - 3u_n}{u_{n+1}} = 4 - 3 \frac{u_n}{u_{n+1}} = 4 - \frac{3}{v_n}$.
3. $1 < v_1 = 2 < 3$. Si $1 < v_n < 3$: $v_{n+1} - 1 = \frac{3(v_n - 1)}{v_n} > 0$ et $v_{n+1} - 3 = \frac{v_n - 3}{v_n} < 0$.
4. $v_{n+1} - v_n = \frac{4v_n - 3 - v_n^2}{v_n} = \frac{(v_n - 1)(3 - v_n)}{v_n} > 0$.
5. a. $v_{n+1} - 3 = \frac{v_n - 3}{v_n}$ et $v_{n+1} - 1 = \frac{3(v_n - 1)}{v_n}$, donc $t_{n+1} = \frac{1}{3}t_n$. b. $t_1 = \frac{2-3}{2-1} = -1$, $t_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; de
 $t_n(v_n - 1) = v_n - 3 : v_n = \frac{3 - t_n}{1 - t_n} = \frac{3 + 3^{1-n}}{1 + 3^{1-n}} = \frac{3^n + 1}{3^{n-1} + 1}$.
6. $u_1 = \frac{1+1}{2} = 1$. Si $u_n = \frac{1+3^{n-1}}{2}$, alors $u_{n+1} = v_n u_n = \frac{3^n + 1}{3^{n-1} + 1} \times \frac{1 + 3^{n-1}}{2} = \frac{1 + 3^n}{2}$.

Résumé : suites numériques

Notion	Définition	Méthode / formule
Suite majorée par M	$(\forall n \in I) u_n \leq M$	signe de $M - u_n$, récurrence
Suite minorée par m	$(\forall n \in I) u_n \geq m$	signe de $u_n - m$, récurrence
Suite bornée	majorée et minorée	$(\exists K \geq 0)(\forall n) u_n \leq K$
Croissante	$(\forall n) u_{n+1} \geq u_n$	signe de $u_{n+1} - u_n$; $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ si $u_n > 0$
Décroissante	$(\forall n) u_{n+1} \leq u_n$	signe de $u_{n+1} - u_n$; $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ si $u_n > 0$
Arithmétique de raison r	$u_{n+1} - u_n = r$	$u_n = u_p + (n - p)r$; $\sum_{k=p}^n u_k = (n - p + 1) \frac{u_p + u_n}{2}$
Géométrique de raison q	$u_{n+1} = q u_n$	$u_n = u_p q^{n-p}$; $\sum_{k=p}^n u_k = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$ ($q \neq 1$)
Trois termes consécutifs a, b, c	arithmétique : $2b = a + c$	géométrique (non nuls) : $b^2 = ac$