

# Cours — Chapitre 06

## Analytique du produit scalaire dans le plan

1<sup>ère</sup> Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

**Plan du chapitre.** I. Rappels — II. Expression analytique du produit scalaire ; droites (1. Expression analytique, normes, distances, cosinus et sinus — 2. Vecteur normal et équation cartésienne d’une droite — 3. Distance d’un point à une droite) — III. Étude analytique du cercle (1. Équation cartésienne — 2. Ensemble  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  — 3. Intérieur, extérieur — 4. Représentation paramétrique — 5. Positions relatives d’une droite et d’un cercle — 6. Tangente en un point — 7. Exercices de synthèse) — IV. Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire — Résumé.

**Cadre.** Prérequis : produit scalaire (définition géométrique), calcul vectoriel, droites du plan, trigonométrie du tronc commun. À partir de la partie II, le plan est rapporté à un **repère orthonormé**  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Dans les solutions,  $\iff$  n’est écrit que si chaque étape est réversible.

### I. Rappels

#### 1. Repère du plan

##### Définition

- Trois points  $O, I, J$  non alignés définissent un **repère**  $(O; I; J)$ , noté aussi  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  avec  $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$  et  $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ ; le couple  $(\vec{i}; \vec{j})$  est une **base**.
- La base (et le repère) est **orthogonale** si  $\vec{i} \perp \vec{j}$ , **normée** si  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ , **orthonormée** si elle est à la fois orthogonale et normée.

#### 2. Coordonnées d’un point, d’un vecteur, du milieu

##### Propriété

Dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  :

- $A(x_A; y_A) \iff \overrightarrow{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j}$ ;  $\vec{u}(x; y) \iff \vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j}$  (couples uniques).
- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$ ; le milieu de  $[AB]$  a pour coordonnées  $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ .

#### 3. Formule trigonométrique du produit scalaire

##### Propriété

- Pour  $\vec{u} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{v} \neq \vec{0}$  et  $\alpha$  une mesure de l’angle orienté  $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$  :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha$ . En particulier  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ .
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ ;  $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$ .
  - $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$ ;  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \iff (AB) \perp (CD)$  (pour  $A \neq B, C \neq D$ ).

#### 4. Déterminant de deux vecteurs

##### Définition

Pour  $\vec{u}(a; b)$  et  $\vec{v}(a'; b')$  :  $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$ .  $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \iff \vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

## 5. Vecteur directeur et équation cartésienne d'une droite

### Propriété

- Un **vecteur directeur** d'une droite  $(D)$  est un vecteur non nul de même direction que  $(D)$ .
- Toute droite admet une équation de la forme  $ax + by + c = 0$  avec  $(a; b) \neq (0; 0)$ ; le vecteur  $\vec{u}(-b; a)$  est alors un vecteur directeur.

## 6. Représentation paramétrique d'une droite

### Propriété

La droite passant par  $B(x_B; y_B)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(\alpha; \beta) \neq \vec{0}$  admet la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x_B + \alpha t \\ y = y_B + \beta t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

## 7. Résolution graphique d'une inéquation du premier degré à deux inconnues

### Propriété

La droite  $(D) : ax + by + c = 0$  partage le plan en deux demi-plans ouverts  $(D^+) = \{M(x; y) / ax + by + c > 0\}$  et  $(D^-) = \{M(x; y) / ax + by + c < 0\}$ . Pour savoir lequel convient, on teste un point hors de  $(D)$  (souvent  $O$  si  $O \notin (D)$ ).

## 8. Valeurs trigonométriques usuelles et mesure principale

### Propriété

Si  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$  sont connus,  $\theta$  est déterminé modulo  $2\pi$ ; la **mesure principale** est celle de  $] -\pi; \pi]$ . Par exemple :

| $(\cos \theta; \sin \theta)$ | $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ | $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ | $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ | $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ | $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ |
|------------------------------|------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| mesure principale            | $\frac{\pi}{3}$                                | $-\frac{\pi}{4}$                                       | $\frac{5\pi}{6}$                                | $-\frac{3\pi}{4}$                                       | $-\frac{\pi}{3}$                                |

## II. Expression analytique du produit scalaire; droites

### 1. Expression analytique, normes, distances, cosinus et sinus

#### Activité 1

Soient  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x'; y')$  deux vecteurs non nuls.

- Développer  $(x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$  en utilisant  $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1$  et  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ .
- En déduire  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$  et  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
- En déduire l'expression de  $\cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$  en fonction des coordonnées.
- Pour  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$ , exprimer  $\overrightarrow{AB}$  à l'aide des coordonnées.
- Soit  $\vec{w}$  le vecteur tel que  $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|$  et  $(\widehat{\vec{u}; \vec{w}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .
  - Montrer que  $\vec{w}(-y; x)$  et que  $(\widehat{\vec{v}; \vec{w}}) \equiv \frac{\pi}{2} - (\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) [2\pi]$ .
  - Calculer  $\cos(\widehat{\vec{v}; \vec{w}})$  de deux façons et en déduire  $\sin(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$ .

#### Solution

- $xx'\vec{i}^2 + (xy' + yx')\vec{i} \cdot \vec{j} + yy'\vec{j}^2 = xx' + yy'$ .
- Donc  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ , puis  $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2$ .
- $\cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}}$ .
- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$ , donc  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ .

5. a. Si  $\vec{u} = r(\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j})$ , alors  $\vec{w} = r(\cos(\varphi + \frac{\pi}{2})\vec{i} + \sin(\varphi + \frac{\pi}{2})\vec{j}) = r(-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j})$ , soit  $\vec{w}(-y; x)$ .  
 Chasles :  $(\widehat{\vec{v}; \vec{w}}) \equiv (\widehat{\vec{v}; \vec{u}}) + (\widehat{\vec{u}; \vec{w}}) \equiv \frac{\pi}{2} - (\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$ .
- b. D'une part  $\cos(\widehat{\vec{v}; \vec{w}}) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\widehat{\vec{u}; \vec{v}})) = \sin(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$ ; d'autre part  $\cos(\widehat{\vec{v}; \vec{w}}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} = \frac{-x'y + y'x}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$ .

### À retenir 1

Soient  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x'; y')$ ,  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$ .

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ ;  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ .
- Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$  :  $\cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$  et  $\sin(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$ .
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$ .

### Exemple 1

On considère  $\vec{u}(3; 1)$ ,  $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$  et  $\vec{w} = (2m + 1)\vec{i} - 2\vec{j}$ , où  $m \in \mathbb{R}$ .

1. Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ,  $\|\vec{u}\|$  et  $\|\vec{v}\|$ .
2. Calculer  $\cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$  et  $\sin(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$ , puis la mesure principale de  $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$ .
3. Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{w}$  en fonction de  $m$ , puis déterminer  $m$  pour que  $\vec{u} \perp \vec{w}$ .
4. Pour  $A(2; -1)$  et  $B(-2; 1)$ , calculer  $AB$ .

### Solution

1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 1 + 1 \times 2 = 5$ ;  $\|\vec{u}\| = \sqrt{10}$ ;  $\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$ .
2.  $\cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 3 \times 2 - 1 \times 1 = 5$ , donc  $\sin(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Mesure principale :  $\frac{\pi}{4}$ .
3.  $\vec{u} \cdot \vec{w} = 3(2m + 1) + 1 \times (-2) = 6m + 1$ ;  $\vec{u} \perp \vec{w} \iff 6m + 1 = 0 \iff m = -\frac{1}{6}$ .
4.  $AB = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ .

### Remarque 1 — aire d'un triangle

- $\cos(\widehat{\vec{AB}; \vec{AC}}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC}$  et  $\sin(\widehat{\vec{AB}; \vec{AC}}) = \frac{\det(\vec{AB}; \vec{AC})}{AB \times AC}$ .
- L'aire du triangle  $ABC$  est  $S = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}; \vec{AC})|$  ( $= \frac{1}{2} AB \times AC \times |\sin \widehat{BAC}|$ ); on a aussi  $S = \frac{1}{2} |\det(\vec{BC}; \vec{BA})| = \frac{1}{2} |\det(\vec{CA}; \vec{CB})|$ .

### Exemple 2

Calculer l'aire du triangle  $ABC$  avec  $A(1; -2)$ ,  $B(3; 1)$  et  $C(-1; 4)$ .

### Solution

$\vec{AB}(2; 3)$ ,  $\vec{AC}(-2; 6)$  :  $\det(\vec{AB}; \vec{AC}) = 2 \times 6 - (-2) \times 3 = 18$ , donc  $S = \frac{1}{2} \times 18 = 9$  (unités d'aire).

### Application 1

On considère les points  $A(2; 1)$ ,  $B(-1; 5)$  et  $C(6; 4)$ .

1. Calculer  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  et  $\det(\vec{AB}; \vec{AC})$ .
2. En déduire la nature du triangle  $ABC$ .
3. Calculer les distances  $AB$ ,  $BC$  et  $CA$ .
4. a. Calculer  $\cos(\widehat{\vec{BA}; \vec{BC}})$  et  $\sin(\widehat{\vec{BA}; \vec{BC}})$ .  
 b. En déduire la mesure principale de l'angle orienté  $(\widehat{\vec{BA}; \vec{BC}})$ .
5. Calculer l'aire du triangle  $ABC$ .

**Solution**

- $\overrightarrow{AB}(-3;4), \overrightarrow{AC}(4;3) : \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -12 + 12 = 0$ ;  $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -3 \times 3 - 4 \times 4 = -25$ .
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$  : le triangle est **rectangle en A** (et  $\det \neq 0$  : il n'est pas aplati).
- $AB = \sqrt{9+16} = 5, AC = 5, BC = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = 5\sqrt{2}$  : triangle **rectangle isocèle** en A.
- a.  $\overrightarrow{BA}(3;-4), \overrightarrow{BC}(7;-1) : \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 21 + 4 = 25$ ;  $\det(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = 3 \times (-1) - (-4) \times 7 = 25$ . Donc  $\cos = \frac{25}{5 \times 5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\sin = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .  
b. Mesure principale :  $\frac{\pi}{4}$ .
- $S = \frac{1}{2}|-25| = \frac{25}{2}$ .

**2. Vecteur normal et équation cartésienne d'une droite****Activité 2**

Soit  $(\Delta) : ax + by + c = 0$  avec  $(a; b) \neq (0; 0)$ .

- Donner un vecteur directeur  $\vec{u}$  de  $(\Delta)$ .
- Montrer que  $\vec{n}(a; b)$  et  $\vec{u}$  sont orthogonaux. (On dit que  $\vec{n}$  est un **vecteur normal** à  $(\Delta)$ .)
- Soit  $(D)$  la droite passant par  $A(x_A; y_A)$  et de vecteur normal  $\vec{n}(a; b)$ .  
a. Montrer que  $M \in (D) \iff \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ .  
b. En déduire que  $M(x; y) \in (D) \iff a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$ .

**Solution**

- $\vec{u}(-b; a)$ .
- $\vec{n} \cdot \vec{u} = -ab + ba = 0$ .
- a.  $M \in (D) \iff \overrightarrow{AM}$  est colinéaire à un vecteur directeur  $\vec{u}$  de  $(D) \iff \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$  (dans le plan, les vecteurs orthogonaux à  $\vec{n} \neq \vec{0}$  sont exactement les multiples de  $\vec{u}$ ). b. On écrit  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}$  avec  $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$ .

**À retenir 2**

- Un **vecteur normal** à une droite  $(D)$  est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de  $(D)$ .
- Si  $(D) : ax + by + c = 0$ , alors  $\vec{n}(a; b)$  est normal à  $(D)$  et  $\vec{u}(-b; a)$  la dirige.
- La droite passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$  est l'ensemble des points  $M$  tels que  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ .

**Exemple 3**

- Donner un vecteur normal à  $(D)$  dans chacun des cas : a.  $2x + 5y - 3 = 0$ ; b.  $\frac{1}{2}x - 4 = 0$ ; c.  $y = -3$ .
- Déterminer une équation cartésienne de la droite  $(D)$  passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$  :  
a.  $A(3; -2), \vec{n}(2; -1)$ ; b.  $A(\sqrt{3}; -\sqrt{3}), \vec{n}(2\sqrt{3}; \sqrt{3})$ .
- Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par  $A(-1; 3)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(2; 5)$ .

**Solution**

- a.  $\vec{n}(2; 5)$ ; b.  $\vec{n}(\frac{1}{2}; 0)$  (ou  $(1; 0)$ ); c. l'équation s'écrit  $0x + 1y + 3 = 0 : \vec{n}(0; 1)$ .
- a. *Méthode 1* :  $M(x; y) \in (D) \iff 2(x - 3) - (y + 2) = 0 \iff 2x - y - 8 = 0$ . *Méthode 2* :  $(D) : 2x - y + c = 0$  et  $A \in (D)$  donne  $6 + 2 + c = 0, c = -8$ .  
b.  $2\sqrt{3}(x - \sqrt{3}) + \sqrt{3}(y + \sqrt{3}) = 0 \iff 2\sqrt{3}x + \sqrt{3}y - 3 = 0$  (ou, en divisant par  $\sqrt{3}$  :  $2x + y - \sqrt{3} = 0$ ).
- $M \in (D) \iff \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ y-3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \iff 5(x+1) - 2(y-3) = 0 \iff 5x - 2y + 11 = 0$ .

**Remarque 2 — droites perpendiculaires**

Si  $(D) : ax + by + c = 0$  et  $(D') : a'x + b'y + c' = 0$ , alors  $(D) \perp (D') \iff aa' + bb' = 0$  (les vecteurs normaux sont orthogonaux).

**Exemple 4**

Étudier la perpendicularité des droites  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  :

1.  $(\Delta) : 3x - 4y + 1 = 0$  et  $(\Delta') : 4x + 3y - 2 = 0$ ;
2.  $(\Delta) : x - 3y + 5 = 0$  et  $(\Delta') : 2x + y = 0$ ;
3.  $(\Delta) : 2x + y - 1 = 0$  et  $(\Delta') : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ .

**Solution**

1.  $3 \times 4 + (-4) \times 3 = 0 : (\Delta) \perp (\Delta')$ .
2.  $1 \times 2 + (-3) \times 1 = -1 \neq 0$  : non perpendiculaires.
3.  $\vec{n}(2;1)$  est normal à  $(\Delta)$  et  $\vec{u}(2;1)$  dirige  $(\Delta')$  :  $\det(\vec{n}; \vec{u}) = 0$ , donc  $\vec{u}$  est colinéaire à  $\vec{n}$  :  $(\Delta')$  est perpendiculaire à  $(\Delta)$ .

**Application 2**

Déterminer une équation cartésienne de la droite  $(D)$  dans chacun des cas :

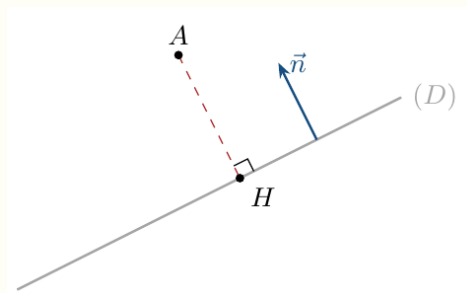
1.  $(D)$  passe par  $A(2; -1)$  et a pour vecteur normal  $\vec{n}(3; \frac{1}{2})$ ;
2.  $(D)$  passe par  $A(-1; 4)$  et est parallèle à  $(\Delta) : x - 3y + 2 = 0$ ;
3.  $(D)$  passe par  $A(2; 3)$  et a pour vecteur directeur  $\vec{u}(3; -1)$ ;
4.  $(D)$  passe par  $A(3; -2)$  et est perpendiculaire à  $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ ;
5.  $(D)$  passe par  $A(2; -3)$  et  $B(2; 5)$ ;
6.  $(D)$  a pour représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ ;
7.  $(D)$  a pour équation réduite  $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}$ .

**Solution**

1.  $3(x - 2) + \frac{1}{2}(y + 1) = 0 \iff 6x + y - 11 = 0$ .
2.  $(D) : x - 3y + c = 0$ ;  $A \in (D) : -1 - 12 + c = 0, c = 13 : x - 3y + 13 = 0$ .
3.  $\det(\vec{AM}; \vec{u}) = -(x - 2) - 3(y - 3) = 0 \iff x + 3y - 11 = 0$ .
4.  $\vec{u}(1; -4)$ , directeur de  $(\Delta)$ , est normal à  $(D) : (x - 3) - 4(y + 2) = 0 \iff x - 4y - 11 = 0$ .
5.  $\vec{AB}(0; 8) : (D) : x - 2 = 0$ .
6.  $(D)$  passe par  $(2; 1)$ , de vecteur directeur  $(-1; 3) : 3(x - 2) + (y - 1) = 0 \iff 3x + y - 7 = 0$ .
7.  $12y = 8x - 3 \iff 8x - 12y - 3 = 0$ .

**3. Distance d'un point à une droite****Activité 3**

Soient  $(D) : ax + by + c = 0$  de vecteur normal  $\vec{n}(a; b)$ ,  $A(x_A; y_A)$  un point et  $H$  son projeté orthogonal sur  $(D)$ .



1. Justifier que  $ax_H + by_H = -c$  et que, si  $A \notin (D)$ ,  $\vec{AH}$  et  $\vec{n}$  sont colinéaires.
2. En déduire  $\vec{AH} \cdot \vec{n} = -(ax_A + by_A + c)$  et  $|\vec{AH} \cdot \vec{n}| = AH \|\vec{n}\|$ .

3. En déduire que  $AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ . (La distance  $AH$  est la **distance de  $A$  à  $(D)$** , notée  $d(A; (D))$ .)

### Solution

1.  $H \in (D)$ ;  $\overrightarrow{AH}$  est orthogonal à la direction de  $(D)$ , donc colinéaire à  $\vec{n}$ .
2.  $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A) = -c - ax_A - by_A$ ; et, pour deux vecteurs colinéaires,  $|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| = AH \|\vec{n}\|$  (le cosinus vaut  $\pm 1$ ; égalité triviale si  $A = H$ ).
3. On divise par  $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ .

### À retenir 3

Pour  $(D) : ax + by + c = 0$  et  $A(x_A; y_A)$  :  $d(A; (D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

### Exemple 5

Calculer la distance du point  $A(4; -1)$  à la droite  $(D) : 2x - 3y + 2 = 0$ .

### Solution

$$d(A; (D)) = \frac{|8 + 3 + 2|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}.$$

### Application 3

Calculer la distance du point  $A$  à la droite  $(D)$  :

1.  $A(1; 4)$  et  $(D) : x + y - 1 = 0$
2.  $A(-2; 1)$  et  $(D) : 3x - 4y + 5 = 0$
3.  $A(3; 2)$  et  $(D) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

### Solution

1.  $\frac{|1+4-1|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$
2.  $\frac{|-6-4+5|}{5} = 1.$
3.  $(D)$  passe par  $(2; -1)$ , dirigée par  $(1; 2) : (D) : 2x - y - 5 = 0$ , et  $d = \frac{|6-2-5|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$

## III. Étude analytique du cercle

### 1. Équation cartésienne d'un cercle

#### Activité 4

**A.** Soit  $(C)$  le cercle de centre  $\Omega(2; -1)$  et de rayon  $\sqrt{5}$ .

1. a. Calculer  $\Omega A, \Omega B, \Omega C$  pour  $A(4; 0), B(3; 1), C(0; 1)$ . b. Lesquels de ces points sont sur  $(C)$  ?
2. Soit  $M(x; y)$ . Exprimer  $\Omega M$  en fonction de  $x$  et  $y$ , puis montrer que  $M \in (C) \iff (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$ .

**B.** Soit  $(C)$  le cercle de centre  $\Omega(a; b)$  et de rayon  $R > 0$ . Montrer que  $M(x; y) \in (C) \iff (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ , puis que cette équation s'écrit  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  avec  $c = a^2 + b^2 - R^2$ .

**C.** Soient  $A(1; 0)$  et  $B(3; 2)$ , et  $(C)$  le cercle de diamètre  $[AB]$ . Justifier que  $M \in (C) \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ , puis en déduire une équation de  $(C)$ .

### Solution

**A.** 1.  $\Omega A = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}, \Omega B = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}, \Omega C = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} : A, B \in (C), C \notin (C)$ . 2.  $\Omega M = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}$  et  $M \in (C) \iff \Omega M = \sqrt{5} \iff \Omega M^2 = 5$  (distances positives). **B.** Même raisonnement ; en développant :  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$ . **C.** Pour  $M \neq A, B : M \in (C) \iff \widehat{AMB}$  est droit  $\iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ ;  $A$  et  $B$  vérifient aussi l'égalité. D'où  $(x-1)(x-3) + y(y-2) = 0$ , soit

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0.$$

#### À retenir 4

1. Le cercle  $\mathcal{C}(\Omega; R)$  de centre  $\Omega(a; b)$  et de rayon  $R > 0$  a pour équation  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ , soit  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  avec  $c = a^2 + b^2 - R^2$ .
2. Le cercle de diamètre  $[AB]$  est l'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ ; son équation est  $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$ .

#### Exemple 6

Déterminer une équation cartésienne du cercle  $(C)$  :

1. de centre  $\Omega(-1; 3)$  et de rayon  $3\sqrt{2}$ ;
2. de centre  $\Omega(2; 1)$  passant par  $A(-1; 5)$ ;
3. de diamètre  $[AB]$  avec  $A(-3; 1)$  et  $B(5; -3)$ ;
4. de centre  $\Omega(1; -2)$  et tangent à la droite  $(\Delta) : 3x - y + 5 = 0$ .

#### Solution

1. *Méthode 1* :  $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 18 \iff x^2 + y^2 + 2x - 6y - 8 = 0$ . *Méthode 2* :  $c = 1 + 9 - 18 = -8$ .
2.  $R = \Omega A = \sqrt{9 + 16} = 5$ ;  $c = 4 + 1 - 25 = -20$  :  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ .
3. *Méthode 1* :  $(x + 3)(x - 5) + (y - 1)(y + 3) = 0 \iff x^2 + y^2 - 2x + 2y - 18 = 0$ . *Méthode 2* : centre  $\Omega(1; -1)$  (milieu),  $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{64+16}}{2} = 2\sqrt{5}$ ,  $c = 1 + 1 - 20 = -18$ .
4. Le rayon est la distance du centre à la tangente :  $R = \frac{|3+2+5|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$ ;  $c = 1 + 4 - 10 = -5$  :  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ .

#### Application 4

Déterminer une équation cartésienne du cercle  $(C)$  :

1. de centre  $\Omega(3; -2)$  et de rayon 4;
2. de centre  $\Omega(1; -3)$  passant par  $A(4; 1)$ ;
3. de diamètre  $[AB]$ , avec  $A(2; -1)$  et  $B(2; 3)$ ;
4. de centre  $\Omega(2; 1)$  et tangent à  $(\Delta) : 3x + 4y + 5 = 0$ ;
5. circonscrit au triangle  $ABC$ , avec  $A(5; 5)$ ,  $B(-2; 4)$  et  $C(6; -2)$ ;
6. passant par  $A(3; 4)$  et  $B(-1; 0)$ , et dont le centre appartient à  $(D) : 2x - y - 3 = 0$ .

#### Solution

1.  $c = 9 + 4 - 16 = -3$  :  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ .
2.  $R = \sqrt{9 + 16} = 5$ ,  $c = 1 + 9 - 25 = -15$  :  $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ .
3.  $(x - 2)^2 + (y + 1)(y - 3) = 0 \iff x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ .
4.  $R = \frac{|6+4+5|}{5} = 3$ ,  $c = 4 + 1 - 9 = -4$  :  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ .
5. On cherche  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  :  $A : 5a + 5b + c = -50$ ;  $B : -2a + 4b + c = -20$ ;  $C : 6a - 2b + c = -40$ . Par différences :  $7a + b = -30$  et  $8a - 6b = -20$ , d'où  $a = -4$ ,  $b = -2$ , puis  $c = -20$  :  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$  (centre  $(2; 1)$ , rayon 5).
6. Le centre est sur la médiatrice de  $[AB]$  : milieu  $(1; 2)$ ,  $\overrightarrow{AB}(-4; -4)$ , d'où  $x + y - 3 = 0$ . Avec  $2x - y - 3 = 0$  :  $\Omega(2; 1)$ ,  $R = \Omega B = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$  :  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$ .

## 2. Ensemble des points $M(x; y)$ tels que $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

#### Activité 5

Soient  $a, b, c$  des réels et  $(\Gamma)$  l'ensemble des points  $M(x; y)$  tels que  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ .

1. Montrer que  $M \in (\Gamma) \iff \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$ .
2. Soit  $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$ . En déduire que  $M \in (\Gamma) \iff \Omega M^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$ .
3. En déduire la nature de  $(\Gamma)$  selon le signe de  $a^2 + b^2 - 4c$ .

**Solution**

1. Forme canonique :  $x^2 + ax = (x + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}$ , de même pour  $y$ . 2. Immédiat. 3. Voir ci-dessous.

**À retenir 5**

Soit  $(\Gamma) : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ , avec  $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ , et  $\Omega(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2})$ .

- Si  $a^2 + b^2 - 4c > 0$  :  $(\Gamma)$  est le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ .
- Si  $a^2 + b^2 - 4c = 0$  :  $(\Gamma) = \{\Omega\}$ .
- Si  $a^2 + b^2 - 4c < 0$  :  $(\Gamma) = \emptyset$ .

**Exemple 7**

Déterminer la nature de  $(\Gamma)$  : 1.  $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$  ; 2.  $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 20 = 0$  ; 3.  $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 25 = 0$ .

**Solution**

1. *Méthode 1* :  $a^2 + b^2 - 4c = 36 + 4 - 4 = 36 > 0$  : cercle de centre  $\Omega(3; -1)$ , de rayon  $\frac{6}{2} = 3$ . *Méthode 2* :  $(x - 3)^2 - 9 + (y + 1)^2 - 1 + 1 = 0 \iff (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$ .  
 2.  $4 + 64 - 80 = -12 < 0$  :  $(\Gamma) = \emptyset$  (en effet  $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = -3$ ).  
 3.  $64 + 36 - 100 = 0$  :  $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 0 \iff x = 4$  et  $y = -3$  :  $(\Gamma) = \{\Omega(4; -3)\}$ .

**Application 5**

Déterminer la nature de  $(\Gamma)$  : 1.  $x^2 + y^2 + 3x - 2y + 4 = 0$  ; 2.  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$  ; 3.  $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 0$  ; 4.  $x^2 + y^2 = 4$ .

**Solution**

1.  $9 + 4 - 16 = -3 < 0$  :  $\emptyset$ .  
 2.  $16 + 36 + 12 = 64 > 0$  : cercle de centre  $(-2; 3)$ , de rayon 4.  
 3.  $\{(-3; 1)\}$ .  
 4. Cercle de centre  $O$ , de rayon 2.

**3. Intérieur et extérieur d'un cercle****À retenir 6**

Soit  $(C)$  le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$ , d'équation  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ , et  $M(x_M; y_M)$ .

- $M \in (C) \iff \Omega M = R \iff x_M^2 + y_M^2 + ax_M + by_M + c = 0$ .
- $M$  est **intérieur** à  $(C) \iff \Omega M < R \iff x_M^2 + y_M^2 + ax_M + by_M + c < 0$ .
- $M$  est **extérieur** à  $(C) \iff \Omega M > R \iff x_M^2 + y_M^2 + ax_M + by_M + c > 0$ . (En effet  $x_M^2 + y_M^2 + ax_M + by_M + c = \Omega M^2 - R^2$ .)

**Exemple 8**

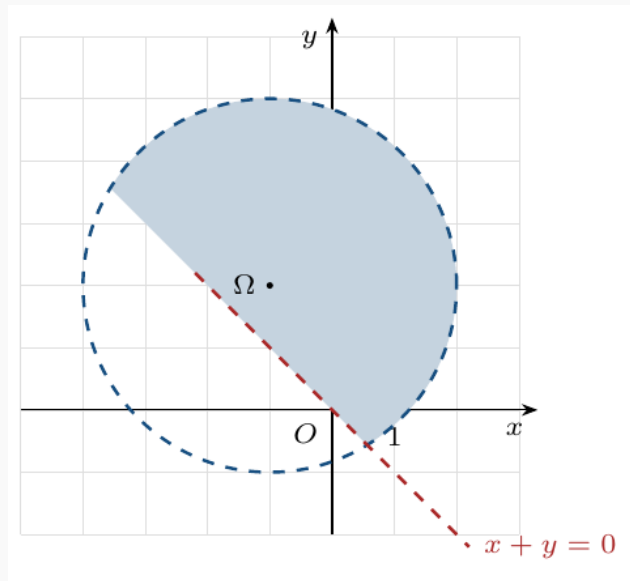
1. Position de  $M$  par rapport à  $(C)$  : a.  $\mathcal{C}(\Omega(1; -2); 2)$  et  $M(3; 1)$  ; b.  $(C) : x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$  et  $M(-1; 1)$ .  
 2. a. Déterminer l'ensemble des points  $M(x; y)$  tels que  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ .  
 b. Résoudre graphiquement  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 < 0$ .  
 c. Résoudre graphiquement  $x + y > 0$ .  
 d. Résoudre graphiquement le système  $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 < 0 \\ x + y > 0 \end{cases}$ .

**Solution**

1. a.  $\Omega M = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} > 2$  :  $M$  est extérieur. b.  $1 + 1 - 4 - 2 = -4 < 0$  :  $M$  est intérieur.  
 2. a.  $4 + 16 + 16 = 36 > 0$  : cercle  $(C)$  de centre  $\Omega(-1; 2)$  et de rayon 3.  
 b. Les solutions sont les couples  $(x; y)$  des points **intérieurs** à  $(C)$  (cercle exclu).  
 c.  $(D) : x + y = 0$  ; le point  $(1; 0)$  vérifie  $1 > 0$  : solutions = demi-plan ouvert situé du côté de  $(1; 0)$ , droite

exclue.

- d. Intersection de l'intérieur du disque et du demi-plan (région colorée, frontières exclues) :

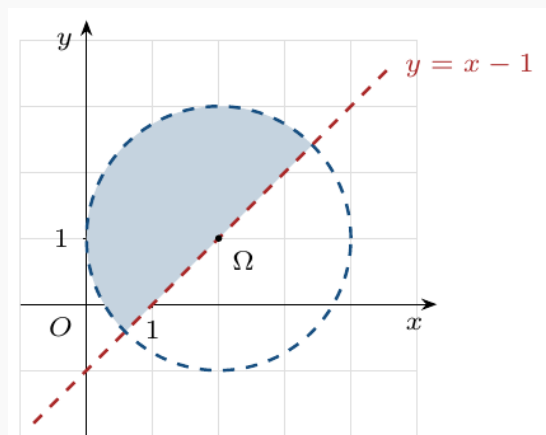


### Application 6

- Position de  $A$  par rapport à  $(C)$  : a.  $\mathcal{C}(\Omega(2; -1); \sqrt{13})$  et  $A(-1; 1)$  ; b.  $(C) : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$  et  $A(4; 2)$ .
- a. Déterminer la nature de  $(\Gamma) : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ . b. Résoudre graphiquement  $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 < 0$ .
- a. Résoudre graphiquement  $x - y - 1 < 0$ . b. En déduire les solutions du système
 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 < 0 \\ x - y - 1 < 0 \end{cases}.$$

### Solution

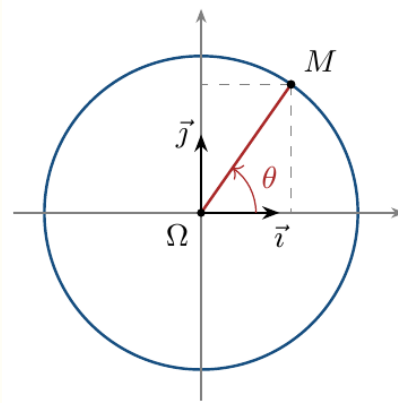
- a.  $\Omega A = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} : A \in (C)$ . b.  $16 + 4 - 16 + 4 - 4 = 4 > 0 : A$  extérieur.
- a.  $16 + 4 - 4 = 16 > 0$  : cercle de centre  $(2; 1)$ , de rayon 2. b. Intérieur de ce cercle.
- a.  $O$  vérifie  $-1 < 0$  : demi-plan ouvert contenant  $O$ , limité par  $y = x - 1$ . b. Intersection des deux régions (le centre  $(2; 1)$  est sur la droite : c'est un demi-disque ouvert) :



#### 4. Représentation paramétrique d'un cercle

##### Activité 6

Soit  $(C)$  le cercle de centre  $\Omega(a; b)$  et de rayon  $R$ .



Partie 1. Soit  $M(x; y) \in (C)$  et  $\theta$  une mesure de  $\left(\vec{i}; \overrightarrow{\Omega M}\right)$ .

1. Montrer que  $\vec{i} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = R \cos \theta$  et  $\vec{j} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = R \sin \theta$  (on remarquera que  $\left(\vec{j}; \overrightarrow{\Omega M}\right) \equiv \theta - \frac{\pi}{2}$ ).
2. Exprimer aussi  $\vec{i} \cdot \overrightarrow{\Omega M}$  et  $\vec{j} \cdot \overrightarrow{\Omega M}$  à l'aide de  $x, y, a, b$ , et en déduire  $x = a + R \cos \theta$ ,  $y = b + R \sin \theta$ .

Partie 2. Montrer que :  $M(x; y) \in (C) \iff \exists \theta \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases}$

##### Solution

Partie 1. 1.  $\vec{i} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = 1 \times R \cos \theta$ ;  $\vec{j} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = R \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = R \sin \theta$ . 2.  $\overrightarrow{\Omega M}(x - a; y - b)$  donne  $\vec{i} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = x - a$  et  $\vec{j} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = y - b$ . Partie 2. Le sens direct est la partie 1. Réciproquement, si  $x = a + R \cos \theta$  et  $y = b + R \sin \theta$ , alors  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = R^2 : M \in (C)$ .

##### À retenir 7

Le cercle de centre  $\Omega(a; b)$  et de rayon  $R$  admet la **représentation paramétrique**  $\begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}$ .

##### Exemple 9

1. Donner une représentation paramétrique du cercle : a. de centre  $\Omega(-1; 4)$  et de rayon 3 ; b.  $(C) : x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$ .
2. Déterminer l'ensemble  $(C)$  défini par  $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \cos \theta \\ y = -1 + \sqrt{3} \sin \theta \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}$ .
3. Déterminer une équation cartésienne de  $(C) : \begin{cases} x = -2 + 4 \cos t \\ y = 3 + 4 \sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ .

##### Solution

1. a.  $\begin{cases} x = -1 + 3 \cos \theta \\ y = 4 + 3 \sin \theta \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}$ . b.  $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$  : centre  $(-2; 1)$ , rayon 4 ;  $\begin{cases} x = -2 + 4 \cos \theta \\ y = 1 + 4 \sin \theta \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}$ .
2.  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 3(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 3$  ; et réciproquement (retenir 7) : cercle de centre  $(2; -1)$  et de rayon  $\sqrt{3}$ .
3.  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16 \iff x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ .

**Application 7**

- Représentation paramétrique du cercle : a. de centre  $\Omega(-2; 3)$  et de rayon  $\sqrt{5}$ ; b.  $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 4$ ; c.  $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 20 = 0$ .
- Équation cartésienne du cercle : a.  $\begin{cases} x = -3 + 2 \cos \theta \\ y = 1 + 2 \sin \theta \end{cases}$  ; b.  $\begin{cases} x = 2 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad (\theta, t \in \mathbb{R})$ .

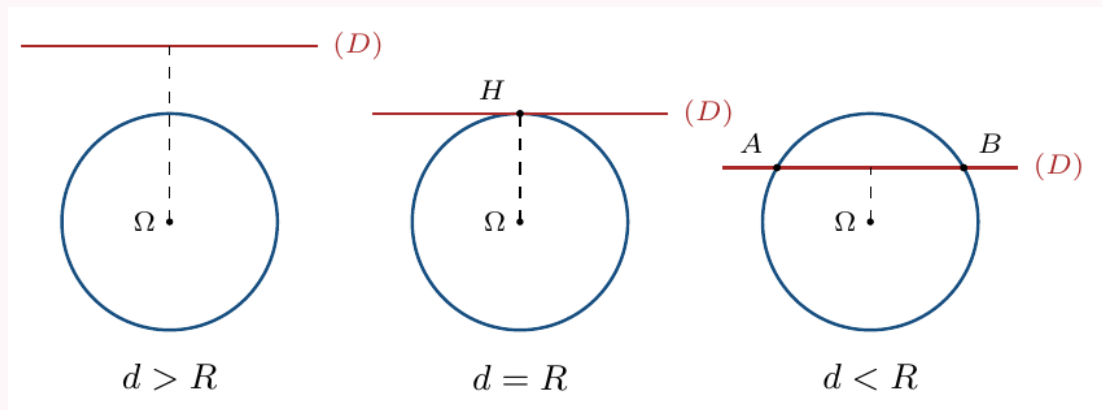
**Solution**

- a.  $x = -2 + \sqrt{5} \cos \theta, y = 3 + \sqrt{5} \sin \theta$ . b.  $x = -1 + 2 \cos \theta, y = 4 + 2 \sin \theta$ . c.  $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 9$  :  $x = 2 + 3 \cos \theta, y = -5 + 3 \sin \theta \quad (\theta \in \mathbb{R})$ .
- a.  $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 4 \iff x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$ . b.  $(x-2)^2 + y^2 = 1 \iff x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ .

**5. Positions relatives d'une droite et d'un cercle****À retenir 8**

Soient  $(C)$  un cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$ ,  $(D)$  une droite et  $d = d(\Omega; (D))$ .

| $d > R$                                       | $d = R$                                 | $d < R$                                   |
|-----------------------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------------|
| $(D)$ extérieure : $(D) \cap (C) = \emptyset$ | $(D)$ tangente : $(D) \cap (C) = \{H\}$ | $(D)$ sécante : $(D) \cap (C) = \{A; B\}$ |

**Exemple 10**

Étudier l'intersection de  $(D)$  et  $(C)$  :

- $(D) : x + y - 3 = 0$ ;  $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ ;
- $(D) : x - 2y + 6 = 0$ ;  $(C) : (x+1)^2 + (y-5)^2 = 5$ ;
- $(D) : x = 3$ ;  $(C) : x^2 + y^2 = 4$ .

**Solution**

- $\Omega(1; -2)$ ,  $R = \sqrt{1+4+5} = \sqrt{10}$ ;  $d = \frac{|1-2-3|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} < \sqrt{10}$  : sécante.  $M \in (D) \cap (C) \iff \begin{cases} y = 3 - x \\ x^2 + (3-x)^2 - 2x + 4(3-x) - 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3 - x \\ 2x^2 - 12x + 16 = 0 \end{cases}$  ;  $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$  : points  $A(2; 1)$  et  $B(4; -1)$ .
- $\Omega(-1; 5)$ ,  $R = \sqrt{5}$ ,  $d = \frac{|-1-10+6|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} = R$  : tangente.  $x = 2y - 6$  donne  $(2y-5)^2 + (y-5)^2 = 5 \iff 5y^2 - 30y + 45 = 0 \iff (y-3)^2 = 0$  : point de contact  $H(0; 3)$ .
- $\Omega = O$ ,  $R = 2$ ,  $d = 3 > 2$  :  $(D) \cap (C) = \emptyset$ .

**Application 8**

Étudier l'intersection de  $(D)$  et  $(C)$  :

- $(D) : x - y + 1 = 0$ ;  $(C) : x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$ ;
- $(D) : 3x + 4y - 30 = 0$ ;  $(C) : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ ;

3.  $(D) : y = -x + 5$ ;  $(C) : x^2 + y^2 = 8$ .

### Solution

1.  $\Omega(2; 1)$ ,  $R = \sqrt{10}$ ,  $d = \frac{|2-1+1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < R$  : sécante ;  $y = x+1$  donne  $2x^2 - 4x - 6 = 0 \iff (x+1)(x-3) = 0$  : points  $(-1; 0)$  et  $(3; 4)$ .
2.  $\Omega(-1; 2)$ ,  $R = 5$ ,  $d = \frac{|-3+8-30|}{5} = 5 = R$  : tangente ; le point de contact est le projeté de  $\Omega$  :  $H = \Omega + \frac{25}{25}(3; 4) = (2; 6)$  (contrôle :  $6 + 24 - 30 = 0$ ).
3.  $d = \frac{|0+0-5|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 2\sqrt{2}$  : intersection vide.

## 6. Tangente à un cercle en un point

### Activité 7

Soient  $(C)$  le cercle de centre  $\Omega(a; b)$ ,  $A(x_A; y_A) \in (C)$  et  $(T)$  la tangente à  $(C)$  en  $A$ .

1. Donner un vecteur normal à  $(T)$ .
2. En déduire que  $M \in (T) \iff \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ , puis que  $M(x; y) \in (T) \iff (a - x_A)(x - x_A) + (b - y_A)(y - y_A) = 0$ .

### Solution

1. La tangente en  $A$  est perpendiculaire au rayon  $[\Omega A]$  :  $\overrightarrow{A\Omega}$  est normal à  $(T)$ .
2. Retenir 2, puis écriture analytique du produit scalaire.

### À retenir 9

La tangente  $(T)$  au cercle  $(C)$  de centre  $\Omega$  au point  $A \in (C)$  est l'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ .

### Exemple 11

Vérifier que  $A \in (C)$ , puis déterminer une équation de la tangente à  $(C)$  en  $A$  :

1.  $(C) : x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ ,  $A(4; 0)$
2.  $(C) : (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$ ,  $A(2; 2)$
3.  $(C) : x^2 + y^2 = 1$ ,  $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

### Solution

1.  $16 - 16 = 0$  :  $A \in (C)$  ;  $\Omega(2; -1)$ ,  $\overrightarrow{A\Omega}(-2; -1)$ ,  $\overrightarrow{AM}(x-4; y)$  :  $-2(x-4) - y = 0 \iff 2x + y - 8 = 0$ .
2.  $9 + 0 = 9$  :  $A \in (C)$  ;  $\overrightarrow{A\Omega}(-3; 0)$  :  $-3(x-2) = 0 \iff x - 2 = 0$ .
3.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  :  $A \in (C)$  ;  $\overrightarrow{A\Omega}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  :  $-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \iff -x + y + \sqrt{2} = 0$ , soit  $x - y - \sqrt{2} = 0$ .

### Application 9

Vérifier que  $A \in (C)$ , puis déterminer une équation de la tangente à  $(C)$  en  $A$  :

1.  $(C) : x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$ ,  $A(1; 5)$
2.  $(C) : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$ ,  $A(4; 2)$
3.  $(C) : x^2 + y^2 = 10$ ,  $A(3; -1)$ .

### Solution

1.  $1 + 25 + 4 - 10 - 20 = 0$  ;  $\Omega(-2; 1)$ ,  $\overrightarrow{A\Omega}(-3; -4)$  :  $-3(x-1) - 4(y-5) = 0 \iff 3x + 4y - 23 = 0$ .
2.  $9 + 16 = 25$  ;  $\overrightarrow{A\Omega}(-3; -4)$  :  $3x + 4y - 20 = 0$ .
3.  $9 + 1 = 10$  ;  $\overrightarrow{A\Omega}(-3; 1)$  :  $-3(x-3) + (y+1) = 0 \iff 3x - y - 10 = 0$ .

## 7. Exercices de synthèse

### Application 10 — synthèse

Déterminer les tangentes au cercle  $(C) : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$  qui sont parallèles à la droite  $(D) : 4x + 3y = 0$ .

#### Solution

Une telle tangente a une équation  $4x + 3y + c = 0$  et vérifie  $d(\Omega; (T)) = 5$  avec  $\Omega(1; -2) : \frac{|4-6+c|}{5} = 5 \iff |c-2| = 25 \iff c = 27$  ou  $c = -23$ . Réciproquement, ces droites sont parallèles à  $(D)$  et à distance  $R$  du centre : ce sont des tangentes. Réponse :  $4x + 3y + 27 = 0$  et  $4x + 3y - 23 = 0$ .

### Application 11 — synthèse

Vérifier que  $A(4; -3)$  est extérieur au cercle  $(C) : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$ , puis déterminer les tangentes à  $(C)$  passant par  $A$ .

#### Solution

$\Omega A = \sqrt{9+16} = 5 > \sqrt{5} : A$  est extérieur. La droite verticale  $x = 4$  est à la distance  $3 \neq \sqrt{5}$  de  $\Omega$  : ce n'est pas une tangente. Les autres droites passant par  $A$  s'écrivent  $y + 3 = m(x - 4)$ , soit  $mx - y - 4m - 3 = 0$ . Tangente  $\iff \frac{|m-1-4m-3|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5} \iff (3m+4)^2 = 5(m^2+1) \iff 4m^2 + 24m + 11 = 0$ ; discriminant  $576 - 176 = 400$ ,  $m = -\frac{1}{2}$  ou  $m = -\frac{11}{2}$ . Tangentes :  $x + 2y + 2 = 0$  et  $11x + 2y - 38 = 0$ .

### Application 12 — synthèse

Pour  $m \in \mathbb{R}$ , soit  $(C_m)$  l'ensemble des points  $M(x; y)$  tels que  $x^2 + y^2 + (2m-2)x + (2m+2)y - 4m - 2 = 0$ .

1. Montrer que  $(C_m)$  est un cercle ; préciser son centre  $\Omega_m$  et son rayon  $R_m$ .
2. Déterminer l'ensemble  $(D)$  des centres  $\Omega_m$  lorsque  $m$  décrit  $\mathbb{R}$ .
3. Montrer que tous les cercles  $(C_m)$  passent par deux points fixes  $A$  et  $B$ .
4. Montrer que  $(D) \perp (AB)$ .

#### Solution

1.  $a^2 + b^2 - 4c = (2m-2)^2 + (2m+2)^2 + 16m + 8 = 8m^2 + 16m + 16 = 8((m+1)^2 + 1) > 0$  : cercle de centre  $\Omega_m(1-m; -1-m)$  et de rayon  $R_m = \sqrt{2(m+1)^2 + 2}$ .
2. Si  $\Omega_m(x; y) : x - y = 2$ . Réciproquement, tout point  $(x; x-2)$  est  $\Omega_m$  pour  $m = 1-x$ . Donc  $(D) : x - y - 2 = 0$ .
3. L'équation s'écrit  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 + 2m(x + y - 2) = 0$ . Un point est sur tous les  $(C_m) \iff x + y - 2 = 0$  et  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ ; avec  $y = 2 - x : 2x^2 - 8x + 6 = 0 \iff x = 1$  ou  $x = 3$ . Points fixes :  $A(1; 1)$  et  $B(3; -1)$ .
4.  $\overrightarrow{AB}(2; -2)$  et  $\vec{u}(1; 1)$  dirige  $(D) : \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0$ , donc  $(D) \perp (AB)$ .

## IV. Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire

### Activité 8

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan.

1. Montrer que  $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \geq |\vec{u} \cdot \vec{v}|$ , avec égalité si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.
2. En déduire que, pour tous réels  $x, y, x', y' : (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) \geq (xx' + yy')^2$ .
3. Montrer que  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ , avec égalité si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires de même sens ou l'un d'eux est nul.
4. En déduire que  $\|\vec{u} - \vec{v}\| \geq \left| \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \right|$ .
5. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$  des vecteurs. Montrer par récurrence que  $\|\sum_{i=1}^n \vec{u}_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|\vec{u}_i\|$ .

#### Solution

1. Si l'un est nul, c'est clair. Sinon  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\cos \theta| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ , avec égalité  $\iff |\cos \theta| = 1 \iff \theta \equiv 0$  ou  $\pi [2\pi] \iff$  colinéaires.
2. On applique 1 à  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x'; y')$  et on élève au carré (quantités positives).

3.  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$ ; égalité  $\iff \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ , i.e. colinéaires de même sens (ou un vecteur nul).
4.  $\|\vec{u}\| = \|(\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v}\| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\| + \|\vec{v}\|$ , et de même en échangeant les rôles.
5. Vrai pour  $n = 1$ ; si c'est vrai au rang  $n$ , alors  $\left\|\sum_{i=1}^{n+1} \vec{u}_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^n \vec{u}_i\right\| + \|\vec{u}_{n+1}\| \leq \sum_{i=1}^{n+1} \|\vec{u}_i\|$  (question 3 puis hypothèse de récurrence).

### À retenir 10

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :

1. **Inégalité de Cauchy-Schwarz** :  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ ; égalité  $\iff \vec{u}$  et  $\vec{v}$  colinéaires.
2. **Inégalité triangulaire** :  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ ; égalité  $\iff$  colinéaires de même sens, ou l'un des deux nul.

### Remarque 3 — généralisation de l'inégalité triangulaire

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tous vecteurs  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$  :  $\left\|\sum_{i=1}^n \vec{u}_i\right\| \leq \sum_{i=1}^n \|\vec{u}_i\|$ .

### Application 13

1. Soient  $x, y, z, t$  des réels. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :  
a.  $(4 + x^2)(1 + y^2) \geq (x + 2y)^2$ ; b.  $(x^2 + y^2)((x + z)^2 + (y + t)^2) \geq (xt - yz)^2$ .
2. À l'aide de l'inégalité triangulaire, montrer que, pour tous réels  $x$  et  $y$  :  $\sqrt{(x - 2)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} \geq 2\sqrt{2}$ .

### Solution

1. a.  $\vec{u}(x; 2)$  et  $\vec{v}(1; y)$  :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = x + 2y$ ,  $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + 4$ ,  $\|\vec{v}\|^2 = 1 + y^2$ ; Cauchy-Schwarz élevée au carré donne le résultat.
- b.  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(y + t; -(x + z))$  :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = x(y + t) - y(x + z) = xt - yz$  et  $\|\vec{v}\|^2 = (x + z)^2 + (y + t)^2$ .
2.  $\vec{u}(x - 2; y)$  et  $\vec{v}(-x; 2 - y)$  :  $\vec{u} + \vec{v} = (-2; 2)$ , de norme  $2\sqrt{2}$ ; donc  $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \geq \|\vec{u} + \vec{v}\| = 2\sqrt{2}$ .

## Résumé : analytique du produit scalaire

| Notion                        | Formule (repère orthonormé)                                                                                                                                                            |
|-------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Produit scalaire, norme       | $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ ; $\ \vec{u}\  = \sqrt{x^2 + y^2}$ ; $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$                                                                   |
| Angle                         | $\cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\ \vec{u}\ \ \vec{v}\ }$ ; $\sin(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\ \vec{u}\ \ \vec{v}\ }$ |
| Aire d'un triangle            | $S = \frac{1}{2}  \det(\vec{AB}; \vec{AC}) $                                                                                                                                           |
| Droite                        | $ax + by + c = 0$ : $\vec{n}(a; b)$ normal, $\vec{u}(-b; a)$ directeur;<br>$(D) \perp (D') \iff aa' + bb' = 0$                                                                         |
| Distance point-droite         | $d(A; (D)) = \frac{ ax_A + by_A + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$                                                                                                                               |
| Cercle                        | $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ ; diamètre $[AB]$ : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$                                                                                                        |
| $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ | cercle, point ou vide selon le signe de $a^2 + b^2 - 4c$                                                                                                                               |
| Représentation paramétrique   | $x = a + R \cos \theta$ , $y = b + R \sin \theta$ , $\theta \in \mathbb{R}$                                                                                                            |
| Droite et cercle              | comparer $d(\Omega; (D))$ et $R$                                                                                                                                                       |
| Tangente en A                 | $\vec{AO} \cdot \vec{AM} = 0$                                                                                                                                                          |
| Inégalités                    | $ \vec{u} \cdot \vec{v}  \leq \ \vec{u}\  \ \vec{v}\ $ ; $\ \vec{u} + \vec{v}\  \leq \ \vec{u}\  + \ \vec{v}\ $                                                                        |