

Cours — Chapitre 05

Barycentre

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. Introduction : points pondérés — I. Barycentre de deux points pondérés (définition, construction, homogénéité, propriété caractéristique, coordonnées) — II. Barycentre de trois points pondérés (définition et propriétés, associativité) — III. Barycentre de quatre points pondérés — Résumé.

Cadre. (P) désigne le plan. On utilise le calcul vectoriel (relation de Chasles, colinéarité) et, pour les lieux géométriques, les ensembles usuels (cercle, médiatrice). Dans les solutions, le symbole $\iff$ n'est écrit que lorsque chaque étape est réversible.

Introduction : points pondérés

Définition — point pondéré, système pondéré

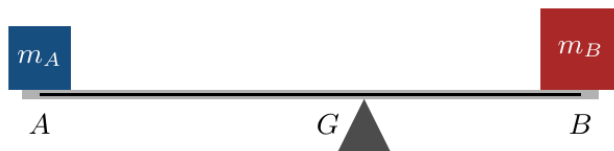
Soient A un point du plan et a un réel. Le couple $(A; a)$ est appelé **point pondéré** (ou point massif) ; le réel a est le **poids** (ou masse algébrique, ou coefficient) du point A . Une famille finie de points pondérés est appelée **système pondéré**.

I. Barycentre de deux points pondérés

1. Activités d'introduction

Activité 1 : le levier

Une barre rigide, de masse négligeable, porte aux points A et B deux masses $m_A > 0$ et $m_B > 0$; elle est en équilibre sur un appui situé en un point G du segment $[AB]$. La loi du levier s'écrit : $m_A \times GA = m_B \times GB$.



- Justifier qu'à l'équilibre $m_A \overrightarrow{GA} + m_B \overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
- Le point G vérifiant $m_A \overrightarrow{GA} + m_B \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ est appelé **barycentre** des points pondérés $(A; m_A)$ et $(B; m_B)$.
Montrer que : $m_A \overrightarrow{GA} + m_B \overrightarrow{GB} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AG} = \frac{m_B}{m_A + m_B} \overrightarrow{AB}$.
- Préciser la position de G lorsque : a. $m_A = m_B = 1$; b. $m_A = 2$ et $m_B = 5$.
- On suppose $m_A = 3$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AB}$. Déterminer m_B .

Solution

- $G \in [AB]$: les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont colinéaires de sens contraires, de normes GA et GB . Le vecteur $m_A \overrightarrow{GA}$ a pour norme $m_A GA$, le vecteur $m_B \overrightarrow{GB}$ a pour norme $m_B GB = m_A GA$ et ils sont de sens contraires : leur somme est nulle.
- Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$, donc $m_A \overrightarrow{GA} + m_B \overrightarrow{GB} = (m_A + m_B) \overrightarrow{GA} + m_B \overrightarrow{AB}$. Ainsi $m_A \overrightarrow{GA} + m_B \overrightarrow{GB} = \vec{0} \iff (m_A + m_B) \overrightarrow{AG} = m_B \overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AG} = \frac{m_B}{m_A + m_B} \overrightarrow{AB}$ (division par $m_A + m_B \neq 0$, réversible).
- a. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$: G est le milieu de $[AB]$. b. $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{7} \overrightarrow{AB}$: G est sur $[AB]$, plus proche de B (le poids le plus fort).
- $\frac{m_B}{3 + m_B} = \frac{2}{5} \iff 5m_B = 6 + 2m_B \iff m_B = 2$.

Activité 2

Soient a et b deux réels non tous deux nuls, A et B deux points distincts. On cherche les points G tels que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

1. Montrer que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0} \iff (a+b)\overrightarrow{AG} = b\overrightarrow{AB}$.
2. En déduire que, si $a+b=0$, aucun point G ne vérifie la relation.
3. On suppose $a+b \neq 0$ et on note G' le point défini par $\overrightarrow{AG'} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.
 - a. Montrer que G' vérifie la relation.
 - b. En déduire qu'il existe un **unique** point G vérifiant la relation, et que $G \in (AB)$.
4. Montrer que G vérifie $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ si et seulement si G est le milieu de $[AB]$.
5. Montrer que $1 \cdot \overrightarrow{GA} + 0 \cdot \overrightarrow{GB} = \vec{0} \iff G = A$.

Solution

1. $a\overrightarrow{GA} + b(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = (a+b)\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{AB}$, d'où l'équivalence.
2. Si $a+b=0$, la relation devient $b\overrightarrow{AB} = \vec{0}$; or $b = -a \neq 0$ (les poids ne sont pas tous deux nuls) et $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$: impossible.
3. a. $(a+b)\overrightarrow{AG'} = b\overrightarrow{AB}$: d'après 1, G' convient. b. Si G convient, $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG'}$, donc $G = G'$: unicité. $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires : $G \in (AB)$.
4. Avec $a=b=1$: $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire G milieu de $[AB]$.
5. Avec $a=1, b=0$: $\overrightarrow{AG} = \vec{0}$, soit $G = A$.

2. Définition**Définition 1 : barycentre de deux points pondérés**

Soient $(A; a)$ et $(B; b)$ deux points pondérés tels que $a+b \neq 0$. Il existe un **unique** point G tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$; on l'appelle **barycentre** du système $\{(A; a); (B; b)\}$ et on note

$$G = \text{bar} \{(A; a); (B; b)\} \iff a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Exemple 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer deux réels a et b tels que $G = \text{bar} \{(A; a); (B; b)\}$:

1. $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{BA} = \vec{0}$
2. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{AB}$
3. $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

Solution

1. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA}$, donc $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{BA} = \vec{0} \iff 5\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Comme $5 + (-2) \neq 0$: $G = \text{bar} \{(A; 5); (B; -2)\}$.
2. $2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB}$, donc la relation équivaut à $3\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$: $G = \text{bar} \{(A; 3); (B; -1)\}$ ($3 - 1 \neq 0$).
3. $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) \iff \frac{1}{4}\overrightarrow{AG} - \frac{3}{4}\overrightarrow{GB} = \vec{0} \iff -\frac{1}{4}\overrightarrow{GA} - \frac{3}{4}\overrightarrow{GB} = \vec{0}$: $G = \text{bar} \{(A; -\frac{1}{4}); (B; -\frac{3}{4})\}$ (somme $-1 \neq 0$).

Remarque 1

- Entre A et B , le point le plus proche de G est celui dont le poids a la **plus grande valeur absolue**; si $|a| = |b|$ (et $a+b \neq 0$, donc $a=b$), G est le milieu de $[AB]$.
- Si a et b sont **de même signe**, G appartient au segment $[AB]$; sinon G est sur la droite (AB) , à l'extérieur du segment.
- $\text{bar} \{(A; 1); (B; 1)\}$ est l'**isobarycentre** de A et B : c'est le milieu de $[AB]$.
- Si $a+b=0$, le système $\{(A; a); (B; b)\}$ n'a **pas** de barycentre.

Application 1

Déterminer deux réels a et b tels que $G = \text{bar} \{(A; a); (B; b)\}$ dans chacun des cas :

1. $3\overrightarrow{GA} + 7\overrightarrow{AG} = \vec{0}$
2. $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$
3. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 4\overrightarrow{AB}$
4. $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Solution

1. $3\overrightarrow{GA} - 7\overrightarrow{GA} = -4\overrightarrow{GA} = \vec{0}$, donc $G = A$: $G = \text{bar} \{(A; 1); (B; 0)\}$ (tout couple $(a; 0)$ avec $a \neq 0$ convient).
2. $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$: $G = \text{bar} \{(A; 3); (B; -1)\}$.
3. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = -4\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} \iff 5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$: $G = \text{bar} \{(A; 5); (B; -3)\}$.
4. $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{GB} \iff \frac{4}{3}\overrightarrow{GA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{GB} = \vec{0}$: $G = \text{bar} \left\{ \left(A; \frac{4}{3}\right); \left(B; -\frac{1}{3}\right) \right\}$, ou encore $G = \text{bar} \{(A; 4); (B; -1)\}$ (en multipliant la relation par 3).

3. Construction du barycentre

Propriété — construction

Si $a + b \neq 0$: $G = \text{bar} \{(A; a); (B; b)\} \iff \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{BG} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{BA}$.

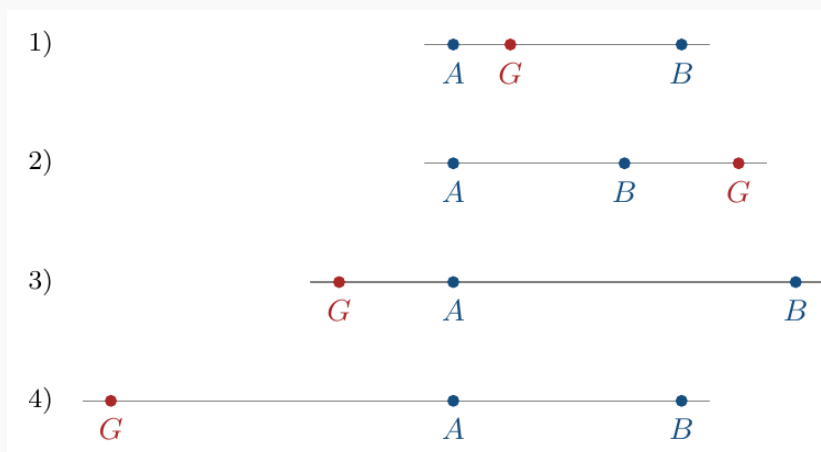
Exemple 2

Soient A et B deux points. Construire G dans chacun des cas :

1. $G = \text{bar} \{(A; -3); (B; -1)\}$, $AB = 4$
2. $G = \text{bar} \{(A; -2); (B; 5)\}$, $AB = 3$
3. $G = \text{bar} \{(A; 4); (B; -1)\}$, $AB = 6$
4. $G = \text{bar} \{(A; -5); (B; 3)\}$, $AB = 4$.

Solution

1. $\overrightarrow{AG} = \frac{-1}{-4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$: $AG = 1$, $G \in [AB]$.
2. $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$: $AG = 5$, G au-delà de B .
3. $\overrightarrow{AG} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB}$: $AG = 2$, G du côté opposé à B par rapport à A .
4. $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{-2}\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$: $AG = 6$, du côté opposé à B .



Remarque 2

Soient A et B deux points distincts.

- G est le milieu de $[AB] \iff G = \text{bar} \{(A; 1); (B; 1)\}$.
- $G \in (AB) \iff$ il existe deux réels a et b , avec $a + b \neq 0$, tels que $G = \text{bar} \{(A; a); (B; b)\}$. (Si $\overrightarrow{AG} = t\overrightarrow{AB}$, on peut prendre $a = 1 - t$ et $b = t$.)

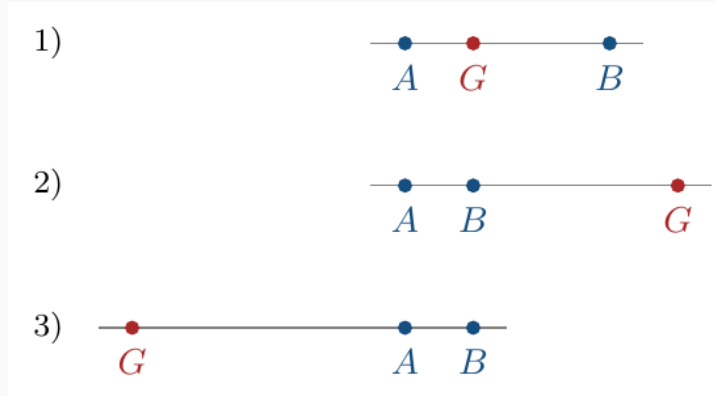
Application 2

Soient A et B deux points. Construire G dans chacun des cas :

1. $G = \text{bar} \{(A; 2); (B; 1)\}$, $AB = 3$
2. $G = \text{bar} \{(A; -3); (B; 4)\}$, $AB = 1$
3. $G = \text{bar} \{(A; 5); (B; -4)\}$, $AB = 1$.

Solution

1. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$: $AG = 1$
2. $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{1}\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AB}$: $AG = 4$, au-delà de B
3. $\overrightarrow{AG} = \frac{-4}{1}\overrightarrow{AB}$: $AG = 4$, du côté opposé à B .


4. Homogénéité et propriété caractéristique
Activité 3

Soient a et b deux réels tels que $a + b \neq 0$, et $G = \text{bar} \{(A; a); (B; b)\}$.

1. Soit $k \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $\frac{a}{k}\overrightarrow{GA} + \frac{b}{k}\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ et en déduire que $G = \text{bar} \{(A; \frac{a}{k}); (B; \frac{b}{k})\}$.
2. Montrer que, pour tout point M : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a + b)\overrightarrow{MG}$.
3. Réciproquement, soit G' un point tel que, pour tout point M , $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a + b)\overrightarrow{MG'}$. Montrer que $G' = G$.
4. Dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on note $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. En prenant $M = O$, établir que $G\left(\frac{ax_A + bx_B}{a + b}; \frac{ay_A + by_B}{a + b}\right)$.

Solution

1. On divise la relation $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ par $k \neq 0$; la somme des nouveaux poids $\frac{a+b}{k}$ est non nulle, et l'unicité du barycentre donne le résultat.
2. $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = a(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + b(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) = (a + b)\overrightarrow{MG} + \underbrace{a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB}}_{=\vec{0}}$.
3. Avec $M = G'$: $a\overrightarrow{G'A} + b\overrightarrow{G'B} = \vec{0}$, donc G' est le barycentre, i.e. $G' = G$ par unicité.
4. $\overrightarrow{OG} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}}{a + b}$; les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$, d'où le résultat.

Propriété — homogénéité

Pour tout $k \in \mathbb{R}^*$: $G = \text{bar} \{(A; a); (B; b)\} \iff G = \text{bar} \{(A; ka); (B; kb)\}$. Multiplier (ou diviser) tous les poids par un même réel **non nul** ne change pas le barycentre.

Exemple 3

Soit $G = \text{bar} \{(A; 150); (B; -250)\}$. Montrer que $G = \text{bar} \{(A; 3); (B; -5)\}$.

Solution

Par homogénéité (division des poids par $50 \neq 0$) : $G = \text{bar} \left\{ \left(A; \frac{150}{50} \right); \left(B; \frac{-250}{50} \right) \right\} = \text{bar} \{(A; 3); (B; -5)\}$.

Propriété — propriété caractéristique

Si $a + b \neq 0$: $G = \text{bar} \{(A; a); (B; b)\} \iff (\forall M \in (P)) \quad a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a + b)\overrightarrow{MG}$.

Exemple 4

Soit ABC un triangle. On pose $G = \text{bar} \{(A; 3); (B; 2)\}$ et $G' = \text{bar} \{(A; -3); (C; 8)\}$.

- À l'aide de la propriété caractéristique, montrer que $(\forall M \in (P)) \quad 2\overrightarrow{MB} + 8\overrightarrow{MC} = 5\overrightarrow{MG} + 5\overrightarrow{MG'}$.
- Soit $I = \text{bar} \{(B; 2); (C; 8)\}$.
 - Simplifier, par deux méthodes, le vecteur $2\overrightarrow{IB} + 8\overrightarrow{IC}$.
 - En déduire que I est le milieu du segment $[GG']$.

Solution

- Pour tout M : $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG}$ et $-3\overrightarrow{MA} + 8\overrightarrow{MC} = 5\overrightarrow{MG'}$. En additionnant : $2\overrightarrow{MB} + 8\overrightarrow{MC} = 5\overrightarrow{MG} + 5\overrightarrow{MG'}$.
- a. *Méthode 1* : par définition de I , $2\overrightarrow{IB} + 8\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. *Méthode 2* : en prenant $M = I$ dans 1, $2\overrightarrow{IB} + 8\overrightarrow{IC} = 5\overrightarrow{IG} + 5\overrightarrow{IG'}$.
b. Donc $5\overrightarrow{IG} + 5\overrightarrow{IG'} = \vec{0}$, soit $\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IG'} = \vec{0}$: $I = \text{bar} \{(G; 1); (G'; 1)\}$ est le milieu de $[GG']$.

Remarque 3 — ensembles usuels de points

Soient A et B deux points distincts et $R > 0$.

Condition sur M	Ensemble des points M
$MA = R$	cercle de centre A et de rayon R
$MA = 0$	le singleton $\{A\}$
$MA = -R$	l'ensemble vide
$MA \leq R$	disque fermé de centre A et de rayon R
$MA = MB$	médiatrice du segment $[AB]$

Exemple 5

Soient A et B deux points distincts et $G = \text{bar} \{(A; 3); (B; 1)\}$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

- $\|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 0$
- $\|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 12$
- $\|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\|$.

Solution

Par la propriété caractéristique, pour tout M : $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MG}$.

- $\|4\overrightarrow{MG}\| = 0 \iff MG = 0 \iff M = G$: l'ensemble est $\{G\}$.
- $4MG = 12 \iff MG = 3$: cercle de centre G et de rayon 3.
- Soit $G' = \text{bar} \{(A; 1); (B; 3)\}$: $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MG'}$. La condition équivaut à $4MG = 4MG'$, soit $MG = MG'$. Comme $G \neq G'$ ($\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$), l'ensemble est la **médiatrice** de $[GG']$.

5. Coordonnées du barycentre

Propriété — coordonnées

Dans un repère du plan, si $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $a + b \neq 0$:

$$G = \text{bar} \{(A; a); (B; b)\} \iff x_G = \frac{ax_A + bx_B}{a + b} \text{ et } y_G = \frac{ay_A + by_B}{a + b}.$$

Application 3

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère $A(3; -1)$, $B(6; 5)$, $C(-3; 2)$, $D(0; -1)$, et l'on pose $G = \text{bar} \{(A; 1); (B; 2)\}$, $G' = \text{bar} \{(C; 1); (D; 2)\}$.

- Déterminer les coordonnées de G et de G' .
- Soient I , J , K les milieux respectifs de $[AC]$, $[BD]$ et $[GG']$.
 - Déterminer les coordonnées de I , J et K .
 - Montrer, par deux méthodes, que I , J et K sont alignés.
- Déterminer l'ensemble des points M tels que : a. $\|\vec{MA} + 2\vec{MB}\| = 27$; b. $\|\vec{MA} + 2\vec{MB}\| = \|\vec{MC} + 2\vec{MD}\|$.

Solution

- $G\left(\frac{3+12}{3}; \frac{-1+10}{3}\right) = G(5; 3)$; $G'\left(\frac{-3+0}{3}; \frac{2-2}{3}\right) = G'(-1; 0)$.
- a. $I\left(0; \frac{1}{2}\right)$, $J(3; 2)$, $K\left(2; \frac{3}{2}\right)$.
 b. Méthode 1 (déterminant) : $\vec{IJ}\left(3; \frac{3}{2}\right)$, $\vec{IK}(2; 1)$ et $\det(\vec{IJ}; \vec{IK}) = 3 \times 1 - \frac{3}{2} \times 2 = 0$: vecteurs colinéaires, points alignés. Méthode 2 (barycentre) : $\vec{OK} = \frac{1}{2}(\vec{OG} + \vec{OG'}) = \frac{1}{6}(\vec{OA} + 2\vec{OB} + \vec{OC} + 2\vec{OD}) = \frac{1}{6}(2\vec{OI} + 4\vec{OJ})$, donc $K = \text{bar} \{(I; 1); (J; 2)\}$ et $K \in (IJ)$.
- a. $\vec{MA} + 2\vec{MB} = 3\vec{MG}$: $3MG = 27 \iff MG = 9$; cercle de centre $G(5; 3)$ et de rayon 9.
 b. $\vec{MC} + 2\vec{MD} = 3\vec{MG'}$: la condition équivaut à $MG = MG'$; c'est la médiatrice de $[GG']$, droite passant par $K\left(2; \frac{3}{2}\right)$ et perpendiculaire à (GG') .

II. Barycentre de trois points pondérés

1. Définition et propriétés

Activité 4

Soient a, b, c trois réels non tous nuls et ABC un triangle. On cherche les points G tels que $a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC} = \vec{0}$.

- Montrer que la relation équivaut à $(a + b + c)\vec{AG} = b\vec{AB} + c\vec{AC}$.
- En déduire que, si $a + b + c = 0$, aucun point ne vérifie la relation.
- On suppose $a + b + c \neq 0$. Montrer qu'il existe un unique point G vérifiant la relation et que $\vec{AG} = \frac{b}{a + b + c}\vec{AB} + \frac{c}{a + b + c}\vec{AC}$.
- Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, G vérifie aussi $\frac{a}{k}\vec{GA} + \frac{b}{k}\vec{GB} + \frac{c}{k}\vec{GC} = \vec{0}$.
- Montrer que, pour tout point M : $a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC} = (a + b + c)\vec{MG}$.
- En déduire les coordonnées de G dans un repère, en fonction de celles de A, B, C .

Solution

- Chasles : $a\vec{GA} + b(\vec{GA} + \vec{AB}) + c(\vec{GA} + \vec{AC}) = (a + b + c)\vec{GA} + b\vec{AB} + c\vec{AC}$.
- Si $a + b + c = 0$: la relation s'écrit $b\vec{AB} + c\vec{AC} = \vec{0}$; $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ n'étant pas colinéaires, $b = c = 0$, puis $a = 0$: contraire à l'hypothèse.
- La relation équivaut à $\vec{AG} = \frac{b}{a + b + c}\vec{AB} + \frac{c}{a + b + c}\vec{AC}$, qui définit un unique point.
- On divise la relation par $k \neq 0$.
- Même calcul que dans l'activité 3 (Chasles avec le point M).

6. Avec $M = O : \overrightarrow{OG} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$, d'où les formules ci-dessous.

Définition 2 : barycentre de trois points pondérés et propriétés

Soient $(A; a)$, $(B; b)$, $(C; c)$ trois points pondérés tels que $a + b + c \neq 0$.

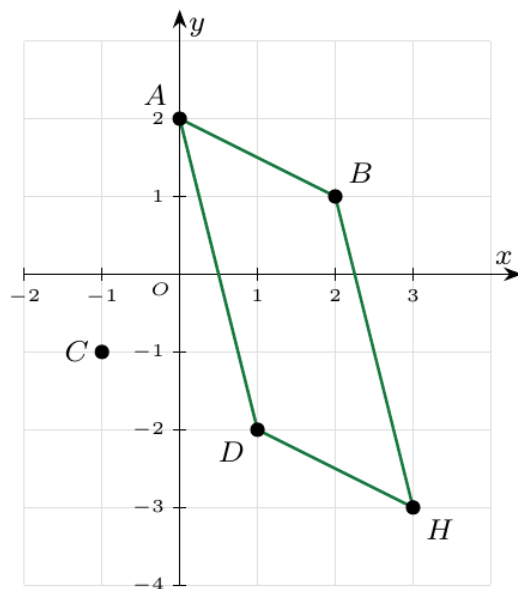
1. Il existe un unique point G , le **barycentre** du système, tel que : $G = \text{bar} \{(A; a); (B; b); (C; c)\} \iff a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
2. **Construction** : $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$.
3. **Homogénéité** : pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, $G = \text{bar} \{(A; ka); (B; kb); (C; kc)\}$.
4. **Propriété caractéristique** : $G = \text{bar} \{(A; a); (B; b); (C; c)\} \iff (\forall M) a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$.
5. **Coordonnées** : $x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}$ et $y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}$.

Exemple 6

1. Déterminer des réels a, b, c tels que $G = \text{bar} \{(A; a); (B; b); (C; c)\}$, sachant que $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.
2. Dans un repère, placer $A(0; 2)$, $B(2; 1)$, $C(-1; -1)$, puis les points $H = \text{bar} \{(A; 6); (B; -6); (C; -3)\}$ et $D = \text{bar} \{(A; 1); (B; -1); (C; -1)\}$.
3. Montrer que $H = \text{bar} \{(A; 2); (B; -2); (C; -1)\}$.
4. Montrer vectoriellement que le quadrilatère $ADHB$ est un parallélogramme.
5. Déterminer les coordonnées de H et de D .
6. Retrouver, à l'aide des coordonnées, que $ADHB$ est un parallélogramme.
7. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|4\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$ (G est le point de la question 1).

Solution

1. $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = 3(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) - 2(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}) = -\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC}$. La relation équivaut donc à $3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$; comme $3 - 2 + 1 = 2 \neq 0 : G = \text{bar} \{(A; 3); (B; -2); (C; 1)\}$.
2. H : somme -3 , $\overrightarrow{AH} = \frac{-6}{-3}\overrightarrow{AB} + \frac{-3}{-3}\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. D : somme -1 , $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. (Figure ci-dessous.)
3. Homogénéité : on divise les poids par 3.
4. $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. Donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BH} : ADHB$ est un parallélogramme (les points A, B, D n'étant pas alignés).
5. $x_H = \frac{2 \times 0 - 2 \times 2 - 1 \times (-1)}{-1} = 3$, $y_H = \frac{2 \times 2 - 2 \times 1 - 1 \times (-1)}{-1} = -3 : H(3; -3)$. $x_D = \frac{0 - 2 + 1}{-1} = 1$, $y_D = \frac{2 - 1 + 1}{-1} = -2 : D(1; -2)$.
6. $\overrightarrow{AD}(1; -4)$ et $\overrightarrow{BH}(1; -4) : \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BH}$.
7. Propriété caractéristique : $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$ et $4\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = 2(2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 2 \times (-1)\overrightarrow{MH}$. La condition équivaut à $2MG = 2MH$, soit $MG = MH$: c'est la médiatrice de $[GH]$ ($G \neq H$: avec les coordonnées de la question 5, $G(-\frac{5}{2}; \frac{3}{2})$ et $H(3; -3)$).



Remarque 4

- Si $a + b + c = 0$, le système $\{(A; a); (B; b); (C; c)\}$ n'a pas de barycentre.
- $\text{bar}\{(A; 1); (B; 1); (C; 1)\}$ est l'**isobarycentre** de A, B, C : c'est le **centre de gravité** du triangle ABC .

2. Associativité du barycentre

Activité 5

Soient a, b, c des réels tels que $a + b + c \neq 0$ et $a + b \neq 0$, ABC un triangle, $G = \text{bar}\{(A; a); (B; b); (C; c)\}$ et $H = \text{bar}\{(A; a); (B; b)\}$.

1. a. Vérifier que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = -c\overrightarrow{GC}$.
 b. À l'aide de la propriété caractéristique de H , montrer que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = (a + b)\overrightarrow{GH}$.
 c. En déduire que $G = \text{bar}\{(H; a + b); (C; c)\}$ et que $G \in (CH)$.
2. Cas particulier $a = b = c = 1$: on note I le milieu de $[BC]$. Montrer que $G \in (CH)$ et $G \in (AI)$; en déduire que G est le centre de gravité de ABC .
3. On suppose de plus $b + c \neq 0$ et $a + c \neq 0$; soient $K = \text{bar}\{(B; b); (C; c)\}$ et $L = \text{bar}\{(A; a); (C; c)\}$. Montrer que (CH) , (AK) et (BL) sont concourantes en G .

Solution

1. a. Définition de G . b. Propriété caractéristique de H avec $M = G$. c. Donc $(a + b)\overrightarrow{GH} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ avec $(a + b) + c \neq 0$: $G = \text{bar}\{(H; a + b); (C; c)\}$, et $G \in (CH)$.
2. H est le milieu de $[AB]$; par 1, $G \in (CH)$; de même, en regroupant B et C , $G = \text{bar}\{(A; 1); (I; 2)\} \in (AI)$. G est sur deux médianes : c'est le centre de gravité.
3. Comme en 1 : $G = \text{bar}\{(A; a); (K; b + c)\} \in (AK)$ et $G = \text{bar}\{(B; b); (L; a + c)\} \in (BL)$; les trois droites passent par G .

Propriété — associativité

Le barycentre de trois points pondérés ne change pas si l'on remplace deux d'entre eux par leur barycentre partiel (s'il existe) affecté de la **somme** de leurs poids :

$$\left. \begin{array}{l} G = \text{bar}\{(A; a); (B; b); (C; c)\} \\ H = \text{bar}\{(A; a); (B; b)\}, \quad a + b \neq 0 \end{array} \right\} \implies G = \text{bar}\{(H; a + b); (C; c)\}.$$

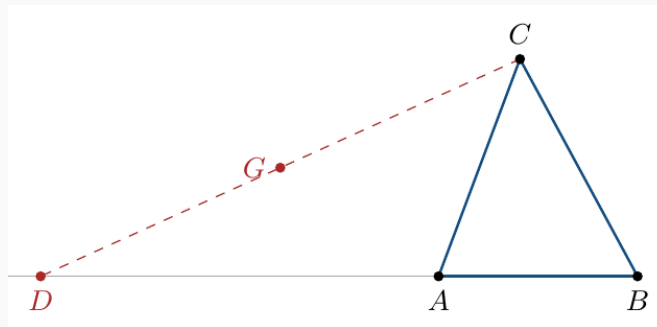
Exemple 7

Soit ABC un triangle.

1. Placer $D = \text{bar} \{(A; 3); (B; -2)\}$ et $G = \text{bar} \{(A; 3); (B; -2); (C; 1)\}$.
2. À l'aide de l'associativité, montrer que G est le milieu de $[CD]$.
3. Soient $H = \text{bar} \{(A; 2); (B; 3)\}$, $E = \text{bar} \{(B; 3); (C; -4)\}$ et $F = \text{bar} \{(A; 2); (C; -4)\}$. Montrer que les droites (CH) , (AE) et (BF) sont concourantes en un point que l'on précisera.

Solution

1. $\overrightarrow{AD} = \frac{-2}{1} \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AG} = \frac{-2}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$.
2. En regroupant A et B en D (poids $3 - 2 = 1$) : $G = \text{bar} \{(D; 1); (C; 1)\}$, milieu de $[CD]$.
3. Le système $\{(A; 2); (B; 3); (C; -4)\}$ a un barycentre G' car $2 + 3 - 4 = 1 \neq 0$. Associativité : $G' = \text{bar} \{(H; 5); (C; -4)\} \in (CH)$; $G' = \text{bar} \{(A; 2); (E; -1)\} \in (AE)$; $G' = \text{bar} \{(F; -2); (B; 3)\} \in (BF)$. Les trois droites sont concourantes en $G' = \text{bar} \{(A; 2); (B; 3); (C; -4)\}$.

**Application 4**

Soient ABC un triangle, I le milieu de $[BC]$ et $G = \text{bar} \{(A; 2); (B; 1); (C; 1)\}$.

1. Montrer que G est le milieu de $[AI]$, puis construire G .
2. Soit $J = \text{bar} \{(A; 2); (B; 1)\}$. Montrer que $G \in (CJ)$ et préciser la position de G sur $[CJ]$.

Solution

1. $I = \text{bar} \{(B; 1); (C; 1)\}$; associativité : $G = \text{bar} \{(A; 2); (I; 2)\}$, milieu de $[AI]$.
2. Associativité : $G = \text{bar} \{(J; 3); (C; 1)\}$, donc $G \in (CJ)$ et $\overrightarrow{JG} = \frac{1}{4} \overrightarrow{JC}$: G est sur $[CJ]$, au quart à partir de J .

III. Barycentre de quatre points pondérés**Propriété**

- Les définitions et propriétés précédentes (existence et unicité si la somme des poids est non nulle, construction, homogénéité, propriété caractéristique, coordonnées) **s'étendent** à quatre points pondérés.
- **Associativité** : on peut remplacer deux ou trois des points par leur barycentre partiel (s'il existe), affecté de la somme de leurs poids, sans changer le barycentre du système.

Application 5

Soit $ABCD$ un quadrilatère et G l'isobarycentre de A, B, C, D . On note I, J, K, L, P, Q les milieux respectifs de $[AB]$, $[CD]$, $[AD]$, $[BC]$, $[AC]$, $[BD]$.

1. Montrer que G est le milieu de $[IJ]$, de $[KL]$ et de $[PQ]$.
2. En déduire que les segments $[IJ]$, $[KL]$ et $[PQ]$ ont le même milieu.

Solution

1. $G = \text{bar} \{(A; 1); (B; 1); (C; 1); (D; 1)\}$. En regroupant A, B en I et C, D en J (poids 2 chacun) : $G = \text{bar} \{(I; 2); (J; 2)\}$, milieu de $[IJ]$. De même $G = \text{bar} \{(K; 2); (L; 2)\}$ et $G = \text{bar} \{(P; 2); (Q; 2)\}$.
2. Les trois segments ont pour milieu commun G (en particulier $IKJL$ est un parallélogramme).

Résumé : barycentre

Notion	Deux points ($a + b \neq 0$)	Trois points ($a + b + c \neq 0$)
Définition	$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$	$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
Construction	$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$
Homogénéité	poids $\times k$, $k \neq 0$	poids $\times k$, $k \neq 0$
Propriété caractéristique	$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$	$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$
Coordonnées	$x_G = \frac{ax_A + bx_B}{a+b}$	$x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}$
Cas particuliers	milieu : poids égaux	centre de gravité : poids égaux
Associativité	—	$G = \text{bar} \{(H; a+b); (C; c)\}$ si $H = \text{bar} \{(A; a); (B; b)\}$
Alignement	$G \in (AB)$	regroupement $\Rightarrow$ concours de droites