

Cours — Chapitre 04

Fonctions numériques

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. Introduction — 1. Ensemble de définition — 2. Fonctions paires, fonctions impaires — 3. Variations d’une fonction — 4. Fonctions majorées, minorées, bornées ; extremums — 5. Fonctions polynômes du second degré — 6. Fonctions homographiques — 7. Résolution graphique et algébrique d’équations et d’inéquations — 8. Fonctions $x \mapsto \sqrt{x+a}$, $x \mapsto ax^3$, $f+c$, cf — 9. Image d’un intervalle — 10. Composée de deux fonctions — 11. Fonctions périodiques — 12. Fonction partie entière — Résumé.

Cadre. Ce chapitre prolonge le tronc commun ; il n’utilise ni dérivées ni limites : les variations s’étudient avec la **définition** ou le **taux de variation**, et les tableaux de variations ne portent aucune valeur aux bornes infinies. Les résultats du chapitre 03 (images, composition, bijection) sont réinvestis.

Introduction

Une **fonction numérique** f associe à chaque réel x de son ensemble de définition D_f un unique réel noté $f(x)$, appelé **image** de x ; on note $f : x \mapsto f(x)$. Tout réel x tel que $f(x) = b$ est un **antécédent** de b : pour trouver les antécédents de b , on résout l’équation $f(x) = b$. Une fonction numérique est donc une application de D_f vers $\mathbb{R}$ (chapitre 03).

I. Généralités sur les fonctions numériques

1. Ensemble de définition d’une fonction numérique

Définition 1 : Ensemble de définition

L’**ensemble de définition** (ou domaine) de f , noté D_f , est l’ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.

Remarque

— En pratique : tout **dénominateur** doit être **non nul**, toute expression **sous une racine carrée** doit être **positive ou nulle**.

— On dit que f est définie sur I lorsque $I \subset D_f$.

Propriété

Soient P et Q deux fonctions polynômes.

Fonction	Ensemble de définition
f polynôme	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{P(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) \geq 0\}$
$f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) > 0\}$

Exemple 1

Déterminer D_f dans chacun des cas suivants : $f_1(x) = \sqrt{x+3}$; $f_2(x) = \frac{1}{x+3}$; $f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$; $f_4(x) = \frac{x-4}{x^2+x-6}$; $f_5(x) = \sqrt{x^2+x-6}$; $f_6(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x-2}$; $f_7(x) = \sqrt{x^2+5}$; $f_8(x) = \frac{2x+1}{x^2+4}$; $f_9(x) = \sqrt{5-2x}$; $f_{10}(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$.

Solution

$D_{f_1} = [-3; +\infty[$; $D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$; $D_{f_3} =]-3; +\infty[$. Comme $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$: $D_{f_4} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$ et $D_{f_5} =]-\infty; -3] \cup [2; +\infty[$ (le trinôme est positif à l'extérieur des racines). $D_{f_6} = \{x / x \geq -3 \text{ et } x \neq 2\} = [-3; 2[\cup]2; +\infty[$. $x^2 + 5 > 0$ et $x^2 + 4 > 0$: $D_{f_7} = D_{f_8} = \mathbb{R}$. $5 - 2x \geq 0 \iff x \leq \frac{5}{2}$: $D_{f_9} = \left] -\infty; \frac{5}{2} \right]$. Enfin $\frac{x+1}{x-2} \geq 0$ avec $x \neq 2$: tableau de signes, $D_{f_{10}} =]-\infty; -1] \cup]2; +\infty[$.

Remarque — égalité de deux fonctions

Deux fonctions f et g sont **égales** ($f = g$) si $D_f = D_g$ et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in D_f$. Par exemple $x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1}$ et $x \mapsto x+1$ ne sont pas égales (domaines $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\mathbb{R}$).

Remarque — courbe représentative

- Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la **courbe** (C_f) est l'ensemble des points $M(x; f(x))$ avec $x \in D_f$: $M(x; y) \in (C_f) \iff (x \in D_f \text{ et } y = f(x))$.
- Les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses sont les points $M(x; 0)$ tels que $f(x) = 0$; si $0 \in D_f$, (C_f) coupe l'axe des ordonnées en $B(0; f(0))$.

2. Fonctions paires et fonctions impaires**Définition 2 : Partie symétrique par rapport à 0**

Une partie D de $\mathbb{R}$ est **symétrique par rapport à zéro** si : $(\forall x \in D) \quad -x \in D$.

Exemple 2

Parmi les parties suivantes, lesquelles sont symétriques par rapport à zéro ? $[-3; 3]$; $[-3; 2]$; $[-4; -1] \cup [1; 4]$; $]1; 5[$; $\mathbb{R}$; $\{-3; 4; 6; 3; -6; -4; 0\}$; $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; $\mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$; $\mathbb{R}^*$; $[-4; -1] \cup [1; 3]$; $] -2; 2[$; $] -\infty; 0]$; $\{-3; 4; 6; 3; -6; 0\}$.

Solution

Symétriques : $[-3; 3]$, $[-4; -1] \cup [1; 4]$, $\mathbb{R}$, $\{-3; 4; 6; 3; -6; -4; 0\}$, $\mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$, $\mathbb{R}^*$, $] -2; 2[$. Non symétriques (contre-exemple) : $[-3; 2]$ (-3 y est, pas 3) ; $]1; 5[$ (2 y est, pas -2) ; $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ (-3 y est, pas 3) ; $[-4; -1] \cup [1; 3]$ (-4 y est, pas 4) ; $] -\infty; 0]$ (-1 y est, pas 1) ; $\{-3; 4; 6; 3; -6; 0\}$ (4 y est, pas -4).

Définition 3 : Parité

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f .

1. f est **paire** si D_f est symétrique par rapport à zéro et si $(\forall x \in D_f) \quad f(-x) = f(x)$.
2. f est **impaire** si D_f est symétrique par rapport à zéro et si $(\forall x \in D_f) \quad f(-x) = -f(x)$.

Exemple 3

Étudier la parité de : $f_1(x) = 3x^2 - 2$; $f_2(x) = x - \frac{2}{x}$; $f_3(x) = |x| - 2$; $f_4(x) = x^3 - x + 2$; $f_5(x) = \sqrt{x+1}$.

Solution

- $D_{f_1} = \mathbb{R}$ symétrique et $f_1(-x) = 3x^2 - 2 = f_1(x)$: f_1 est **paire**.
- $D_{f_2} = \mathbb{R}^*$ symétrique et $f_2(-x) = -x + \frac{2}{x} = -f_2(x)$: f_2 est **impaire**.
- $D_{f_3} = \mathbb{R}$ et $|-x| = |x|$: f_3 est **paire**.
- $D_{f_4} = \mathbb{R}$; $f_4(2) = 8$ et $f_4(-2) = -4$: $f_4(-2) \neq f_4(2)$ et $f_4(-2) \neq -f_4(2)$, donc f_4 n'est **ni paire ni impaire** (remarque : $x = 1$ ne suffit pas, car $f_4(-1) = f_4(1) = 2$).
- $D_{f_5} = [-1; +\infty[$ n'est pas symétrique ($2 \in D_{f_5}$, $-2 \notin D_{f_5}$) : f_5 n'est **ni paire ni impaire**.

Remarque

- $\cos$ est paire ; $\sin$ et $\tan$ sont impaires.
- Dans un repère orthogonal, la courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'**axe des ordonnées** ; celle d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'**origine**.

3. Variations d'une fonction numérique

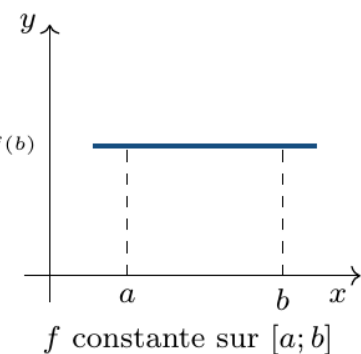
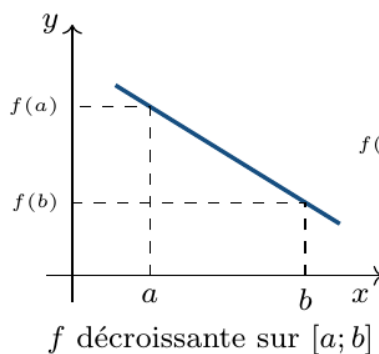
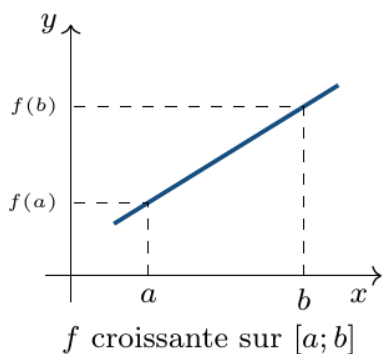
Définition 4 : Sens de variation

Soient f une fonction et I un intervalle inclus dans D_f . Pour tous $x, y \in I$:

- f est **croissante** sur I si $x < y \implies f(x) \leq f(y)$; **strictement croissante** si $x < y \implies f(x) < f(y)$;
- f est **décroissante** sur I si $x < y \implies f(x) \geq f(y)$; **strictement décroissante** si $x < y \implies f(x) > f(y)$;
- f est **constante** sur I si $f(x) = f(y)$.

Remarque

- f est **monotone** (resp. strictement monotone) sur I si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement) sur I .
- On résume les variations dans un **tableau de variations** : une flèche montante indique que f est croissante, une flèche descendante qu'elle est décroissante.



Définition 5 : Taux de variation

Pour deux réels distincts x et y de D_f , le **taux de variation** de f entre x et y est $T(x; y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$.

Propriété

Soit f définie sur un intervalle I . Si, pour tous $x \neq y$ de I : $T(x; y) \geq 0$ (resp. > 0 , ≤ 0 , < 0 , $= 0$), alors f est croissante (resp. strictement croissante, décroissante, strictement décroissante, constante) sur I .

Propriété — variations et parité

Soit f une fonction dont le domaine est symétrique par rapport à 0, $I \subset \mathbb{R}_+$ un intervalle inclus dans D_f et $J = \{-x / x \in I\}$ son symétrique.

- Si f est **paire** : f croissante sur $I \iff f$ décroissante sur J (et inversement).
- Si f est **impaire** : f a le **même** sens de variation sur I et sur J .

Exemple 4

Soit $f(x) = x + \frac{9}{x}$.

1. Déterminer D_f .
2. Vérifier que f est impaire.
3. Montrer que, pour tous $x \neq y$ de D_f : $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = 1 - \frac{9}{xy}$.
4. Étudier les variations de f sur $[3; +\infty[$ et sur $]0; 3]$.
5. En déduire les variations de f sur $]-\infty; -3]$ et sur $[-3; 0[$.
6. Dresser le tableau de variations de f .

Solution

1. $D_f = \mathbb{R}^*$.
2. $\mathbb{R}^*$ est symétrique et $f(-x) = -x - \frac{9}{x} = -f(x)$: f est impaire.

3. $f(x) - f(y) = (x - y) + 9 \frac{y - x}{xy} = (x - y) \left(1 - \frac{9}{xy}\right)$; on divise par $x - y \neq 0$.
4. Si $x, y \geq 3$ distincts, $xy > 9$, donc $T > 0$: f est strictement croissante sur $[3; +\infty[$. Si $x, y \in]0; 3]$ distincts, $0 < xy < 9$, donc $\frac{9}{xy} > 1$ et $T < 0$: f est strictement décroissante sur $]0; 3]$.
5. f étant impaire, elle est strictement croissante sur $]-\infty; -3]$ et strictement décroissante sur $[-3; 0[$.
6. $f(3) = 6$ et $f(-3) = -6$:

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
$f(x)$	↗ -6 ↘			↘ 6 ↗	

Remarque

Pour une fonction paire ou impaire, il suffit d'étudier ses variations sur $D_E = D_f \cap \mathbb{R}_+$, appelé **domaine d'étude**, puis de conclure par symétrie.

4. Fonctions majorées, minorées, bornées — Extremums**Activité 1**

Soient $f(x) = x + \frac{4}{x}$ et $g(x) = x^2 - 4x + 1$.

1. a. Montrer que $(\forall x \in]-\infty; 0[) f(x) \leq -4$ (on dit que f est **majorée** par -4 sur $]-\infty; 0[$).
b. En déduire que f est majorée par -3 sur $]-\infty; 0[$.
2. a. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) \geq -3$, puis que $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) \geq -5$.
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $g(x) = -3$ et $g(x) = -5$.
c. En déduire que -3 est la valeur minimale de g sur $\mathbb{R}$.

Solution

1. a. Pour $x < 0$: $f(x) + 4 = \frac{x^2 + 4x + 4}{x} = \frac{(x + 2)^2}{x} \leq 0$ (numérateur positif, dénominateur négatif). b. $f(x) \leq -4 \leq -3$.
2. a. $g(x) = (x - 2)^2 - 3 \geq -3 \geq -5$. b. $g(x) = -3 \iff (x - 2)^2 = 0 \iff x = 2$; $g(x) = -5 \iff (x - 2)^2 = -2$: pas de solution. c. $g(x) \geq -3$ pour tout x et $g(2) = -3$: -3 est la valeur minimale de g ; -5 est un minorant qui n'est pas atteint.

Définition 6 : Fonction majorée, minorée, bornée

Soit f définie sur un intervalle I .

- f est **majorée** sur I s'il existe un réel M tel que $(\forall x \in I) f(x) \leq M$;
- f est **minorée** sur I s'il existe un réel m tel que $(\forall x \in I) f(x) \geq m$;
- f est **bornée** sur I si elle est majorée et minorée sur I .

Exemple 5

Soient $f(x) = 2 - \sqrt{3 - x}$ et $g(x) = \sqrt{x^2 + 9}$.

1. Déterminer D_f et D_g .
2. Montrer que f est majorée par 2 sur D_f .
3. Montrer que g est minorée par 3 sur D_g .

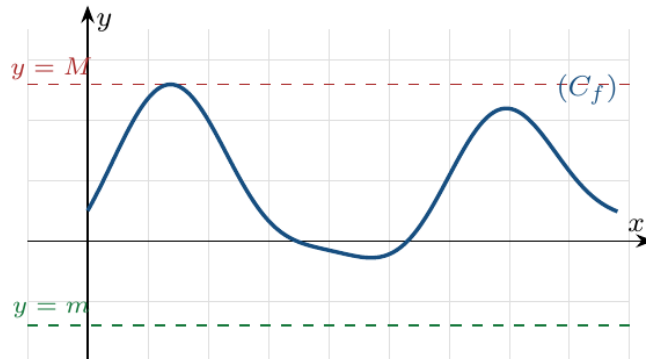
Solution

1. $D_f =]-\infty; 3]$; $D_g = \mathbb{R}$ (car $x^2 + 9 > 0$).
2. $\sqrt{3 - x} \geq 0$, donc $f(x) \leq 2$ pour tout $x \in D_f$.

3. $x^2 + 9 \geq 9$ et la racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$: $g(x) \geq \sqrt{9} = 3$.

Remarque

- f est bornée sur $I \iff (\exists m, M \in \mathbb{R})(\forall x \in I) m \leq f(x) \leq M \iff (\exists K \in \mathbb{R}_+)(\forall x \in I) |f(x)| \leq K$.
- Si f est majorée par M sur I , (C_f) est **au-dessous** de la droite $y = M$ sur I ; si f est minorée par m , (C_f) est **au-dessus** de la droite $y = m$.



Définition 7 : Extremums

Soient f définie sur un intervalle I et $a \in I$.

- $f(a)$ est la **valeur maximale** (le **maximum**) de f sur I si $(\forall x \in I) f(x) \leq f(a)$;
- $f(a)$ est la **valeur minimale** (le **minimum**) de f sur I si $(\forall x \in I) f(x) \geq f(a)$;
- un **extremum** est un maximum ou un minimum.

Propriété

- M est le maximum de f sur $I \iff [(\forall x \in I) f(x) \leq M]$ **et** l'équation $f(x) = M$ a au moins une solution dans I .
- m est le minimum de f sur $I \iff [(\forall x \in I) f(x) \geq m]$ **et** l'équation $f(x) = m$ a au moins une solution dans I .

Remarque

- Lecture d'un tableau de variations sur $I = [a; b]$ (à gauche : $f(c)$ est le minimum ; à droite : $f(c)$ est le maximum) :

x	a	c	b
$f(x)$		$f(c)$	

x	a	c	b
$f(x)$		$f(c)$	

- Un extremum sur tout D_f est dit **global** ; un extremum atteint en c est **local** s'il ne l'est que pour les x de D_f assez proches de c .
- f est **positive** sur I ($f \geq 0$) si $(\forall x \in I) f(x) \geq 0$; **négative** si $(\forall x \in I) f(x) \leq 0$.

II. Fonctions usuelles et résolution graphique

1. Fonctions polynômes du second degré

Activité 2

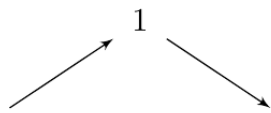
Soit $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

- Déterminer D_f .
- Montrer que f n'est ni paire ni impaire.
- Dresser le tableau de variations de f ; en déduire un extremum et préciser sa valeur.
- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (C_f) .

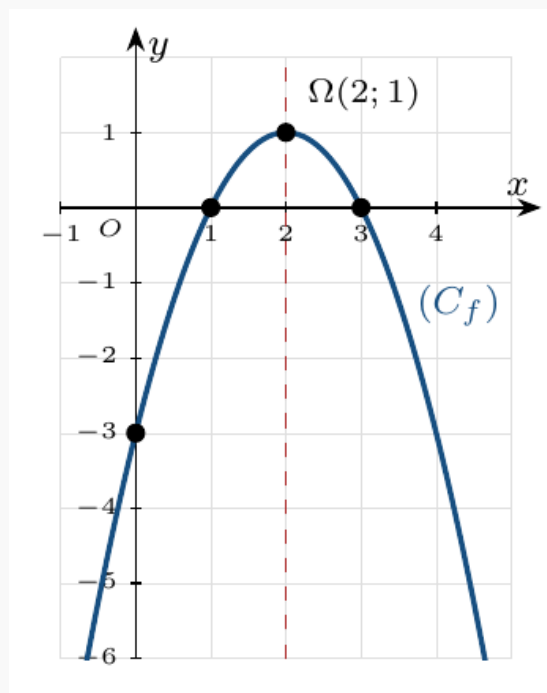
5. Tracer (C_f) dans un repère orthonormé.

Solution

1. $D_f = \mathbb{R}$ (polynôme).
2. $f(1) = 0$ et $f(-1) = -8$: $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$.
3. Pour $x \neq y$: $T = \frac{-(x^2 - y^2) + 4(x - y)}{x - y} = -(x + y) + 4$. Si $x, y \leq 2$ distincts, $x + y < 4$ et $T > 0$; si $x, y \geq 2$ distincts, $T < 0$. Ainsi f est strictement croissante sur $]-\infty; 2]$ et strictement décroissante sur $[2; +\infty[$; $f(2) = 1$ est le **maximum** de f sur $\mathbb{R}$ (en effet $f(x) = 1 - (x - 2)^2 \leq 1$).

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	1 		

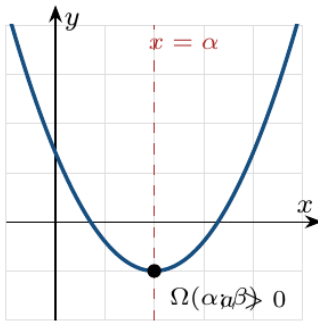
4. $f(x) = -(x - 2)^2 + 1$: (C_f) est la **parabole** de sommet $\Omega(2; 1)$, d'axe de symétrie la droite $x = 2$, tournée vers le bas ($a = -1 < 0$). Elle coupe (Ox) en $(1; 0)$ et $(3; 0)$, et (Oy) en $(0; -3)$.
5. Voir la figure.



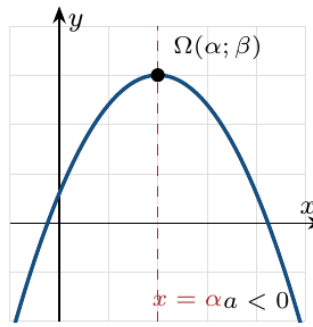
Propriété

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$. Dans un repère, la courbe de $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est une **parabole** de sommet $\Omega(\alpha; \beta)$ et d'axe la droite $x = \alpha$, car $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

- Si $a > 0$: f est décroissante sur $]-\infty; \alpha]$, croissante sur $[\alpha; +\infty[$; β est le **minimum** de f sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$: f est croissante sur $]-\infty; \alpha]$, décroissante sur $[\alpha; +\infty[$; β est le **maximum** de f sur $\mathbb{R}$.



x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow \quad \nearrow \quad \beta$		



x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow \quad \searrow \quad \beta$		

Remarque

(C_f) est symétrique par rapport à la droite $(\Delta) : x = \alpha$: il suffit de la tracer pour $x \in [\alpha; +\infty[$, puis de compléter par la symétrie d'axe (Δ) .

2. Fonctions homographiques**Activité 3**

Soit $g(x) = \frac{3x - 3}{x + 1}$.

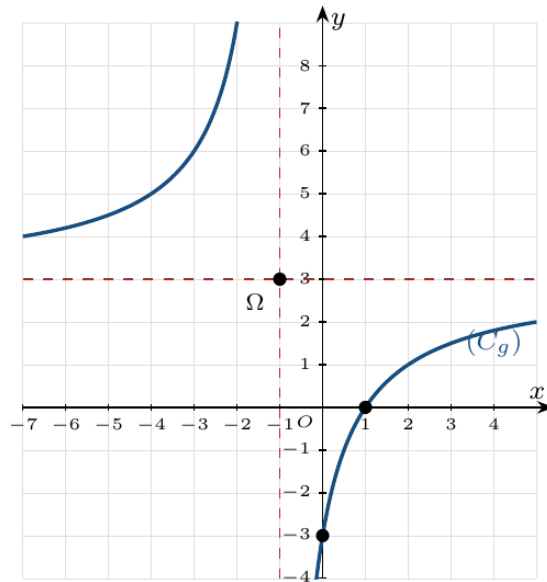
- Déterminer D_g .
- Dresser le tableau de variations de g .
- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (C_g) .
- Tracer (C_g) dans un repère orthonormé.

Solution

- $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- $g(x) = 3 - \frac{6}{x+1}$. Pour $x \neq y$ dans $D_g : T = \frac{6}{(x+1)(y+1)}$. Si x, y sont dans le même intervalle $]-\infty; -1[$ ou $]-1; +\infty[$, $(x+1)(y+1) > 0$ et $T > 0$: g est strictement croissante sur chacun de ces intervalles.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow \quad \parallel \quad \nearrow$		

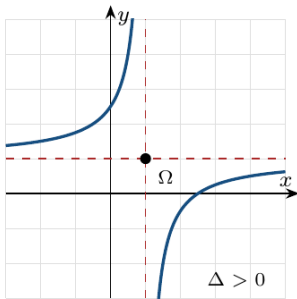
- (C_g) est l'**hyperbole** de centre $\Omega(-1; 3)$, associée aux droites d'équations $x = -1$ et $y = 3$; Ω est un centre de symétrie de (C_g) . Elle passe par $(1; 0)$ et $(0; -3)$.
- Voir la figure.



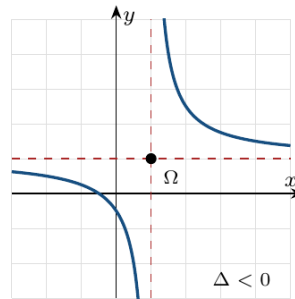
Propriété

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $c \neq 0$ et $\Delta = ad - bc \neq 0$. La fonction $f : x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$ est dite **homographique** ; $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ et, pour $x \in D_f$, $f(x) = \frac{a}{c} - \frac{\Delta}{c^2 \left(x + \frac{d}{c} \right)}$. Sa courbe est l'**hyperbole** de centre $\Omega \left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c} \right)$, associée aux droites d'équations $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$.

- Si $\Delta > 0$: f est strictement croissante sur $]-\infty; -\frac{d}{c}[$ et sur $]-\frac{d}{c}; +\infty[$.
- Si $\Delta < 0$: f est strictement décroissante sur chacun de ces intervalles.



x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↗		↗



x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↘		↘

Remarque

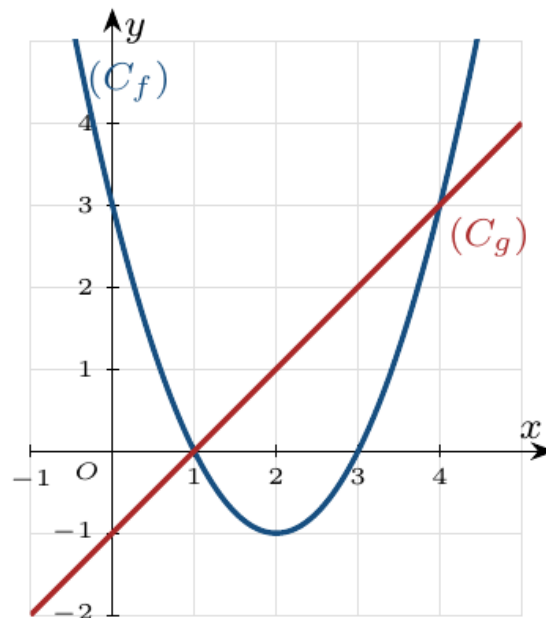
(C_f) est symétrique par rapport à son centre $\Omega \left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c} \right)$. Attention : f n'est pas monotone sur D_f tout entier (ce n'est pas un intervalle).

3. Équations et inéquations : résolution graphique et algébrique

Activité 4

Les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ sont représentées ci-dessous.

1. Résoudre graphiquement : $f(x) = 3$; $f(x) = 0$; $f(x) = g(x)$.
2. Résoudre graphiquement : $f(x) < 3$; $g(x) \geq 2$; $f(x) > g(x)$.

**Solution**

- $f(x) = 3 : S = \{0; 4\}$; $f(x) = 0 : S = \{1; 3\}$; $f(x) = g(x) : S = \{1; 4\}$ (abscisses des points communs).
- $f(x) < 3 : S =]0; 4[$; $g(x) \geq 2 : S = [3; +\infty[$; $f(x) > g(x) : (C_f)$ strictement au-dessus de (C_g) , $S =]-\infty; 1[\cup]4; +\infty[$. (Ici $f(x) = x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = x - 1$: on peut contrôler par le calcul.)

Propriété

Soient f, g représentées par $(C_f), (C_g)$ dans un même repère, et $m \in \mathbb{R}$.

- Les solutions de $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) et de la droite $y = m$.
- Les solutions de $f(x) \geq m$ (resp. $\leq m$) sont les abscisses des points de (C_f) situés sur ou au-dessus (resp. au-dessous) de la droite $y = m$.
- Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) et (C_g) .
- Les solutions de $f(x) \geq g(x)$ (resp. $\leq$) sont les $x \in D_f \cap D_g$ pour lesquels (C_f) est au-dessus (resp. au-dessous) de (C_g) , points d'intersection compris.

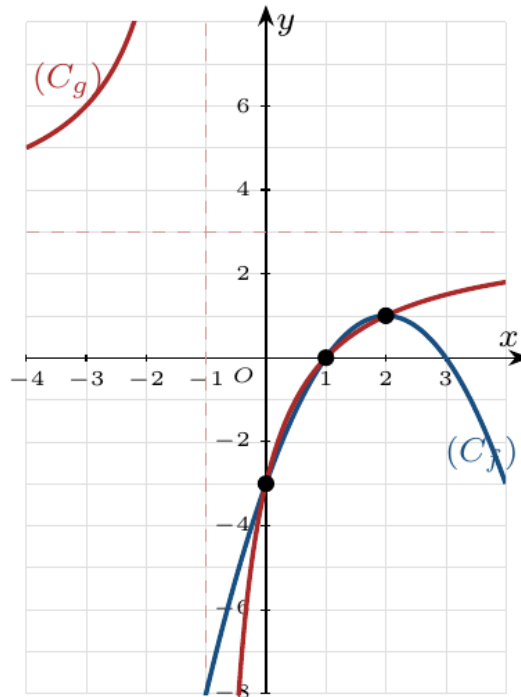
Exemple 6

- Avec la fonction $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ de l'activité 2 :
 - Résoudre graphiquement puis algébriquement $f(x) = -3$ et $f(x) = 0$.
 - Résoudre graphiquement puis algébriquement $f(x) \leq -3$ et $f(x) > 0$.
- Représenter (C_f) et (C_g) dans un même repère, g étant la fonction de l'activité 3.
 - Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$ et $f(x) \geq g(x)$.
- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) \quad f(x) - g(x) = \frac{-x(x-1)(x-2)}{x+1}$.
- Résoudre algébriquement $f(x) = g(x)$ et $f(x) \geq g(x)$.

Solution

- Graphiquement (figure de l'activité 2), la droite $y = -3$ coupe (C_f) aux abscisses 0 et 4. Algébriquement : $-x^2 + 4x - 3 = -3 \iff x(4 - x) = 0 \iff x \in \{0; 4\}$. De même $f(x) = 0 \iff -(x-1)(x-3) = 0 \iff x \in \{1; 3\}$.
 - $f(x) \leq -3 \iff x(4 - x) \leq 0 \iff x \in]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[$; $f(x) > 0 \iff (x-1)(x-3) < 0 \iff x \in]1; 3[$.
- Voir la figure.
 - Les courbes se coupent aux points d'abscisses 0, 1 et 2; (C_f) est au-dessus de (C_g) pour $x \in]-1; 0] \cup [1; 2]$.
- $f(x) - g(x) = \frac{(-x^2 + 4x - 3)(x+1) - (3x - 3)}{x+1} = \frac{-x^3 + 3x^2 - 2x}{x+1} = \frac{-x(x-1)(x-2)}{x+1}$.

4. $f(x) = g(x) \iff x(x-1)(x-2) = 0$ (avec $x \neq -1$) : $S = \{0; 1; 2\}$. Tableau de signes de $\frac{-x(x-1)(x-2)}{x+1}$ (racines $-1, 0, 1, 2$) : $f(x) \geq g(x) \iff x \in]-1; 0] \cup [1; 2]$, conforme à la lecture graphique.



4. Fonctions $x \mapsto \sqrt{x+a}$, $x \mapsto ax^3$, $x \mapsto f(x) + c$, $x \mapsto cf(x)$

Activité 5

Soient $f(x) = \sqrt{x+4}$ et $g(x) = 3x^3$.

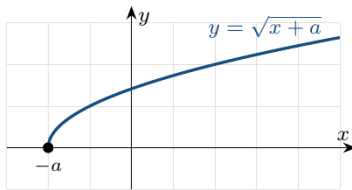
- Déterminer D_f et D_g .
- Montrer que le taux de variation de f entre deux réels distincts x, y de D_f est $T_1 = \frac{1}{\sqrt{x+4} + \sqrt{y+4}}$.
 - En déduire que f est strictement croissante sur D_f .
- Montrer que le taux de variation de g entre $x \neq y$ est $T_2 = 3 \left[\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \right]$.
 - En déduire que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Soient $h(x) = f(x) - 2$ et $k(x) = -\frac{1}{3}g(x)$.
 - Montrer que le taux de variation de h est $T_3 = T_1$.
 - Montrer que le taux de variation de k est $T_4 = -\frac{1}{3}T_2$.
 - En déduire les variations de h et k .

Solution

- $D_f = [-4; +\infty[$, $D_g = \mathbb{R}$.
- $\frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{y+4}}{x-y} = \frac{(x+4) - (y+4)}{(x-y)(\sqrt{x+4} + \sqrt{y+4})} = T_1$ (le dénominateur $\sqrt{x+4} + \sqrt{y+4}$ est non nul car $x \neq y$). b. $T_1 > 0$.
- $\frac{3x^3 - 3y^3}{x-y} = 3(x^2 + xy + y^2) = 3 \left[\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \right]$. b. Ce nombre est > 0 : il serait nul seulement si $y = 0$ et $x = 0$, ce qui contredit $x \neq y$.
- $\frac{(f(x) - 2) - (f(y) - 2)}{x-y} = T_1$. b. $\frac{-\frac{1}{3}g(x) + \frac{1}{3}g(y)}{x-y} = -\frac{1}{3}T_2$. c. h est strictement croissante sur $[-4; +\infty[$; k est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété

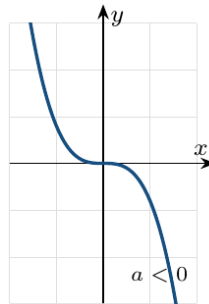
- Fonction** $x \mapsto \sqrt{x+a}$ ($a \in \mathbb{R}$) : $D_f = [-a; +\infty[$ et f est strictement croissante sur D_f , de minimum $f(-a) = 0$. Sa courbe est l'image de celle de $x \mapsto \sqrt{x}$ par la translation de vecteur $-a\vec{i}$.
- Fonction** $x \mapsto ax^3$ ($a \neq 0$) : $D_f = \mathbb{R}$, f est impaire; elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 0$, strictement décroissante si $a < 0$.



x	$-a$	$+\infty$
$f(x)$		



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

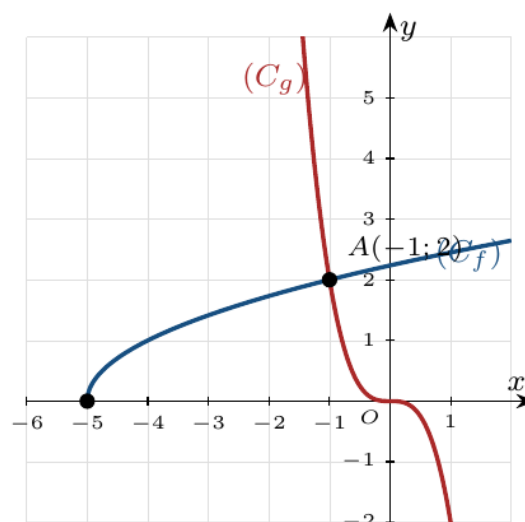
Exemple 7

Soient $f(x) = \sqrt{x+5}$ et $g(x) = -2x^3$.

- Étudier les variations de f et de g .
- Construire (C_f) et (C_g) dans un repère orthonormé.
- Résoudre graphiquement l'inéquation $\sqrt{x+5} + 2x^3 < 0$ sur $[-5; +\infty[$.

Solution

- f est strictement croissante sur $[-5; +\infty[$ (cas $a = 5$); g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (cas $a = -2 < 0$).
- Voir la figure : les courbes se coupent en $A(-1; 2)$ ($f(-1) = \sqrt{4} = 2$ et $g(-1) = 2$).
- $\sqrt{x+5} + 2x^3 < 0 \iff f(x) < g(x)$: (C_f) est strictement au-dessous de (C_g) à gauche de A . Comme f croît et g décroît, A est le seul point commun, et $S = [-5; -1[$.


Remarque — fonctions $f + c$ et c, f

Soient f une fonction et c un réel.

- $h : x \mapsto f(x) + c$: $D_h = D_f$ et h a le **même sens de variation** que f sur tout intervalle où f est monotone ; (C_h) est l'image de (C_f) par la translation de vecteur $c\vec{j}$.

— $k : x \mapsto c f(x) : D_k = D_f$; si $c > 0$, k et f ont le **même** sens de variation ; si $c < 0$, des sens **contraires** ; si $c = 0$, k est nulle.

Exemple 8

À l'aide des tableaux de variations de $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ et $g(x) = \frac{3x-3}{x+1}$ (activités 2 et 3), dresser les tableaux de variations de $h(x) = f(x) + 2$ et $k(x) = \frac{-6x+6}{x+1}$.

Solution

$h = f + 2$ a les variations de f , avec $h(2) = 3$. Et $k(x) = -2g(x)$ avec $-2 < 0$: k est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$h(x)$		3	

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$k(x)$			

III. Image d'un intervalle et composée de fonctions

1. Image d'un intervalle par une fonction

Définition 8 : Image d'un intervalle

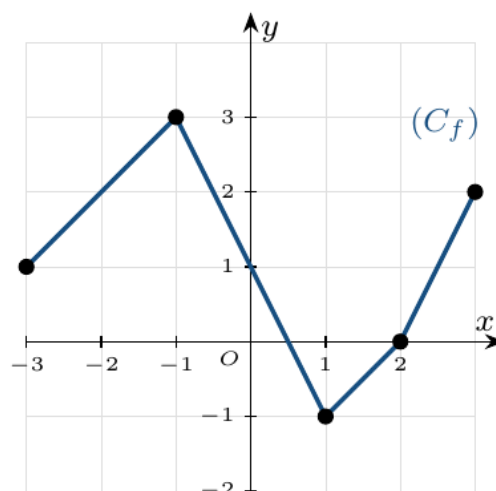
Soit f définie sur un intervalle I . L'**image** de I par f est l'ensemble des valeurs prises par $f(x)$ lorsque x parcourt I : $f(I) = \{f(x) / x \in I\}$ (image directe, chapitre 03).

Propriété (admise)

Pour les fonctions étudiées dans ce chapitre (polynômes, fonctions homographiques, fonctions racines et leurs composées), si f admet sur un intervalle fermé borné I un minimum m et un maximum M , alors $f(I) = [m; M]$. En particulier, si f est croissante sur $[a; b]$, $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$; si elle est décroissante, $f([a; b]) = [f(b); f(a)]$.

Exemple 9

La figure représente une fonction f définie sur $[-3; 3]$. Déterminer $f([-1; 1])$, $f([1; 3])$, $f([-3; -1])$ et $f(]-1; 2])$.



Solution

$f([-1; 1]) = [-1; 3]$; $f([1; 3]) = [-1; 2]$; $f([-3; -1]) = [1; 3]$; $f([-1; 2]) = [-1; 3[$ (la valeur -1 est atteinte en 1, la valeur 3 n'est atteinte qu'en -1 , exclu).

Remarque

- On détermine $f(I)$ à partir de la courbe, du tableau de variations ou par une méthode algébrique.
- Méthode algébrique : $f(I) = J \iff [(\forall x \in I) f(x) \in J]$ et [tout élément de J a au moins un antécédent dans I].

Exemple 10

1. On reprend $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ (activité 2). Déterminer par deux méthodes $f(I)$ pour $I = [0; 1]$, $I = [-1; 4]$, $I = [3; +\infty[$ et $I = \mathbb{R}$.
2. Déterminer par deux méthodes l'image de $I = [1; +\infty[$ par la fonction g de l'activité 3.

Solution

1. *Par le tableau.* f croît sur $] -\infty; 2]$ et décroît sur $[2; +\infty[$, $f(0) = -3$, $f(1) = 0$, $f(-1) = -8$, $f(2) = 1$, $f(3) = 0$, $f(4) = -3$. Donc $f([0; 1]) = [-3; 0]$; sur $[-1; 4]$ le minimum est -8 et le maximum 1 : $f([-1; 4]) = [-8; 1]$; $f([3; +\infty[) =]-\infty; 0]$; $f(\mathbb{R}) =]-\infty; 1]$. *Algébriquement.* $f(x) = y \iff (x-2)^2 = 1-y$. Pour $y \leq 1$, les solutions sont $2 \pm \sqrt{1-y}$. Par exemple pour $I = [3; +\infty[$: si $x \geq 3$, $(x-2)^2 \geq 1$ donc $f(x) \leq 0$; réciproquement, pour $y \leq 0$, $x = 2 + \sqrt{1-y} \geq 3$ convient. De même pour $[0; 1]$: $x \in [0; 1] \iff x-2 \in [-2; -1] \iff (x-2)^2 \in [1; 4]$ (sur $\mathbb{R}_-$ le carré est décroissant), d'où $f(x) \in [-3; 0]$, chaque valeur étant atteinte par $x = 2 - \sqrt{1-y}$.
2. *Par le tableau :* g croît sur $[1; +\infty[$, $g(1) = 0$, et $g(x) = 3 - \frac{6}{x+1} < 3$: $g([1; +\infty[) = [0; 3[$. *Algébriquement :* pour $y \neq 3$, $g(x) = y \iff x = \frac{y+3}{3-y}$, et $\frac{y+3}{3-y} \geq 1 \iff \frac{2y}{3-y} \geq 0 \iff 0 \leq y < 3$. Donc $g([1; +\infty[) = [0; 3[$.

Exemple 11

Une fonction f définie sur $[-2; 3]$, strictement monotone sur chaque intervalle du tableau, a le tableau de variations suivant :

x	-2	0	2	3
$f(x)$	1	$\searrow$ -4	$\nearrow$ 3	$\searrow$ 0

1. Déterminer les extremums de f sur $[-2; 3]$.
2. Comparer $f(\frac{1}{2})$ et $f(1)$.
3. Déterminer $f([-2; 0])$, $f([-2; 2])$ et $f([0; 3])$.
4. Prolonger la restriction de f à $[0; 3]$ en une fonction paire h sur $[-3; 3]$ et dresser le tableau de variations de h .

Solution

1. Maximum 3 (atteint en 2), minimum -4 (atteint en 0).
2. $0 < \frac{1}{2} < 1 \leq 2$ et f est strictement croissante sur $[0; 2]$: $f(\frac{1}{2}) < f(1)$.
3. $f([-2; 0]) = [-4; 1]$; $f([-2; 2]) = [-4; 3]$; $f([0; 3]) = [-4; 3]$.
4. On pose $h(x) = f(x)$ pour $x \in [0; 3]$ et $h(x) = f(-x)$ pour $x \in [-3; 0]$: h est paire et prolonge $f|_{[0; 3]}$. Par symétrie :

x	-3	-2	0	2	3
$h(x)$					

2. Composée de deux fonctions

Définition 9 : Composée

Soient f définie sur I et g définie sur J , avec $f(I) \subset J$. La composée de f suivie de g est la fonction $g \circ f$ définie sur I par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Remarque

- $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$; $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f\}$.
- En général $g \circ f \neq f \circ g$.

Exemple 12

Soient $f(x) = x^2 - 3$, $g(x) = 3x + 2$, $h(x) = (3x + 2)^2 - 3$ et $k(x) = \cos(3x - 1)$.

1. Déterminer $(g \circ f)(x)$ et $(f \circ g)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Écrire h comme la composée de deux fonctions.
3. Écrire k comme la composée de deux fonctions.

Solution

1. $(g \circ f)(x) = 3(x^2 - 3) + 2 = 3x^2 - 7$; $(f \circ g)(x) = (3x + 2)^2 - 3 = 9x^2 + 12x + 1$.
2. $h = f \circ g$.
3. $k = \cos \circ u$ avec $u(x) = 3x - 1$.

Exemple 13

Soient $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{x+2}{2x-1}$.

1. Déterminer D_f , D_g et $D_{g \circ f}$.
2. Donner l'expression de $g \circ f$.

Solution

1. $D_f = \mathbb{R}^*$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. $x \in D_{g \circ f} \iff x \neq 0 \text{ et } \frac{1}{x} \neq \frac{1}{2} \iff x \notin \{0; 2\} : D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$.
2. Pour $x \in D_{g \circ f}$: $(g \circ f)(x) = \frac{\frac{1}{x} + 2}{\frac{2}{x} - 1} = \frac{1 + 2x}{2 - x}$.

Propriété — variations d'une composée

Soient f monotone sur un intervalle I et g monotone sur un intervalle J contenant $f(I)$.

- Si f et g ont le **même** sens de variation (sur I et J), $g \circ f$ est **croissante** sur I .
- Si elles ont des sens **contraires**, $g \circ f$ est **décroissante** sur I .

Solution

Preuve (cas f croissante, g décroissante). Soient $x < y$ dans I : $f(x) \leq f(y)$, ces deux réels sont dans J et g est décroissante, donc $g(f(x)) \geq g(f(y))$. Les autres cas sont analogues.

Exemple 14

Soient $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ et $g(x) = \frac{3x-3}{x+1}$.

1. Déterminer $(g \circ f)(x)$ pour tout $x \in D_{g \circ f}$.

2. À l'aide des tableaux de variations de f et g , déterminer les variations de $g \circ f$ sur $I = [2; 3]$.

Solution

- $x \in D_{g \circ f} \iff f(x) \neq -1 \iff x^2 - 4x + 2 \neq 0 \iff x \notin \{2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}\}$. Alors $(g \circ f)(x) = \frac{3f(x) - 3}{f(x) + 1} = \frac{-3(x-2)^2}{-x^2 + 4x - 2} = \frac{3(x-2)^2}{x^2 - 4x + 2}$.
- $I = [2; 3] \subset D_{g \circ f}$ (car $2 + \sqrt{2} > 3$). f est décroissante sur $[2; 3]$ et $f([2; 3]) = [f(3); f(2)] = [0; 1] \subset]-1; +\infty[$, intervalle où g est croissante. Les sens sont contraires : $g \circ f$ est décroissante sur $[2; 3]$.

Exemple 15

Soient $f(x) = x^2 + 2x - 2$ et $g(x) = \frac{x-1}{x+3}$.

- Donner D_f , D_g et $D_{g \circ f}$.
- Déterminer $(g \circ f)(x)$ pour tout $x \in D_{g \circ f}$.
- Dresser les tableaux de variations de f et de g .
- Déterminer $f(]-\infty; -1])$ et $f([-1; +\infty[)$.
- Étudier les variations de $g \circ f$ sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$.

Solution

- $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. $f(x) = -3 \iff (x+1)^2 = 0 \iff x = -1$, donc $D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- $(g \circ f)(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$.
- $f(x) = (x+1)^2 - 3$: décroissante sur $]-\infty; -1]$, croissante sur $[-1; +\infty[$, minimum -3 . $g(x) = 1 - \frac{4}{x+3}$ ($\Delta = 1 \times 3 - (-1) \times 1 = 4 > 0$) : croissante sur $]-\infty; -3[$ et sur $]-3; +\infty[$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$			

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g(x)$			

- Pour $y \geq -3$, $f(x) = y \iff x = -1 \pm \sqrt{y+3}$, et $-1 - \sqrt{y+3} \leq -1 \leq -1 + \sqrt{y+3}$: $f(]-\infty; -1]) = f([-1; +\infty[) = [-3; +\infty[$.
- Sur $]-\infty; -1[$: f est décroissante et $f(]-\infty; -1[) =]-3; +\infty[$, où g est croissante ; donc $g \circ f$ est **décroissante**. Sur $]-1; +\infty[$: f croissante, $f([-1; +\infty[) =]-3; +\infty[$, g croissante : $g \circ f$ est **croissante**.

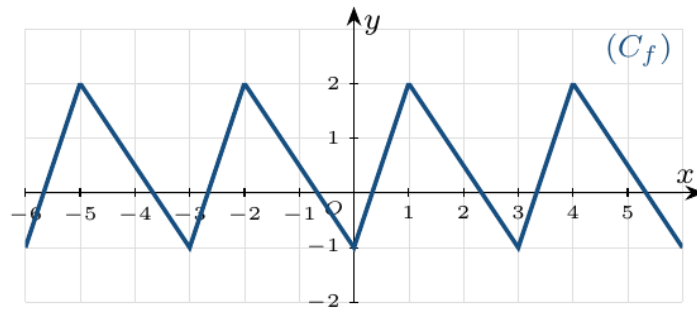
IV. Fonctions périodiques et fonction partie entière

1. Fonctions périodiques

Activité 6

La figure représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

- Vérifier que $f(-2) = f(1)$, $f(0) = f(3)$ et $f(1) = f(4)$.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, quelle relation semble lier $f(x+3)$ et $f(x)$?

**Solution**

1. Par lecture : $f(-2) = f(1) = 2$, $f(0) = f(3) = -1$, $f(1) = f(4) = 2$.
2. La courbe se reproduit identique tous les 3 unités : $f(x+3) = f(x)$ pour tout x .

Définition 10 : Fonction périodique

Soient f définie sur D et $T > 0$. f est **périodique de période T** (ou T -périodique) si :

- pour tout $x \in D$: $x+T \in D$ et $x-T \in D$;
- pour tout $x \in D$: $f(x+T) = f(x)$.

Exemple 16 — fonctions trigonométriques

- $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \pm 2\pi \in \mathbb{R}$, $\cos(x+2\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2\pi) = \sin x$.
- $\tan$ est π -périodique : pour $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$, $x \pm \pi \in D$ et $\tan(x+\pi) = \tan x$.

Exemple 17

Montrer que $f(x) = \sin^2 x$ et $g(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, définies sur $\mathbb{R}$, sont périodiques de périodes respectives π et 4.

Solution

$D = \mathbb{R}$ convient. $f(x+\pi) = (\sin(x+\pi))^2 = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$. $g(x+4) = \cos\left(\frac{\pi x}{2} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = g(x)$.

Remarque

Si f est T -périodique : pour tout entier $k \geq 1$, kT est aussi une période ; (C_f) est invariante par toute translation de vecteur $kT\vec{i}$ ($k \in \mathbb{Z}$). Il suffit donc d'étudier f sur un intervalle de longueur T , souvent $[0; T]$ ou $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$.

2. Fonction partie entière**Définition 11 : Partie entière**

Pour $x \in \mathbb{R}$, la **partie entière** de x , notée $E(x)$ (ou $[x]$), est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1 \quad \text{et} \quad E(x) = m \iff \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \leq x < m + 1. \end{cases}$$

Exemple 18

Calculer $E(\sqrt{3})$, $E(-\pi)$, $E(7,2)$, $E(-7,2)$ et $E(-4)$.

Solution

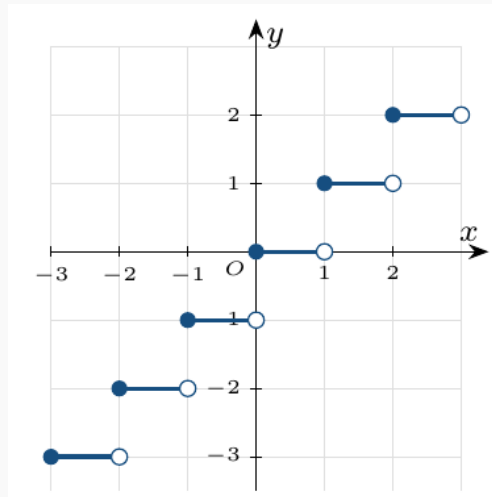
$1 \leq \sqrt{3} < 2$: $E(\sqrt{3}) = 1$. $-4 \leq -\pi < -3$: $E(-\pi) = -4$. $E(7,2) = 7$. $-8 \leq -7,2 < -7$: $E(-7,2) = -8$ (et non -7). $E(-4) = -4$.

Exemple 19

1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x - 1 < E(x) \leq x$.
2. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad E(x + n) = E(x) + n$.
3. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists r \in [0; 1[) \quad x = E(x) + r$.
4. Tracer la courbe de $x \mapsto E(x)$ sur $[-3; 3]$.

Solution

1. De $E(x) \leq x < E(x) + 1$ on tire $E(x) \leq x$ et $x - 1 < E(x)$.
2. $E(x) + n \in \mathbb{Z}$ et $E(x) + n \leq x + n < E(x) + n + 1$; par caractérisation, $E(x + n) = E(x) + n$.
3. $r = x - E(x)$ vérifie $0 \leq r < 1$ et $x = E(x) + r$.
4. Sur chaque $[k; k + 1[$, $E(x) = k$: la courbe est un « escalier » (point plein à gauche, creux à droite).

**Propriété**

- $(\forall x \in \mathbb{Z}) \quad E(x) = x$; $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x - 1 < E(x) \leq x$; $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad E(x + n) = E(x) + n$.
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad x \in [k; k + 1[\iff E(x) = k$; la fonction E est constante sur chaque intervalle $[k; k + 1[$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 20

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E\left(\frac{x+2}{3}\right) = \frac{x-1}{2}$.

Solution

Si x est solution, $k = \frac{x-1}{2}$ est un entier et $x = 2k + 1$. L'équation devient $E\left(\frac{2k+3}{3}\right) = k$, soit $k \leq \frac{2k+3}{3} < k + 1 \iff 3k \leq 2k + 3 < 3k + 3 \iff 0 < k \leq 3$. Donc $k \in \{1; 2; 3\}$ et, réciproquement, ces valeurs conviennent : $S = \{3; 5; 7\}$. (Contrôle : $E\left(\frac{7}{3}\right) = 2 = \frac{5-1}{2}$.)

Résumé : fonctions numériques

Notion	À retenir
Domaine	dénominateurs $\neq 0$, radicandes ≥ 0
Parité	D_f symétrique ; paire : $f(-x) = f(x)$; impaire : $f(-x) = -f(x)$
Variations	$T(x; y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$: signe de $T \Rightarrow$ sens de variation
Majorée / minorée	$f \leq M$ / $f \geq m$ sur I ; extremum : borne atteinte
$ax^2 + bx + c$	parabole de sommet $(-\frac{b}{2a}; f(-\frac{b}{2a}))$
$\frac{ax+b}{cx+d}$	hyperbole de centre $(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c})$, sens donné par le signe de $ad - bc$
$\sqrt{x+a}$; ax^3	croissante sur $[-a; +\infty[$; impaire, sens de variation = signe de a
$f + c$; cf	mêmes variations ; variations identiques ($c > 0$) ou contraires ($c < 0$)
Résolution graphique	$f(x) = m$: intersections avec $y = m$; $f(x) \geq g(x)$: (C_f) au-dessus de (C_g)
Composée	$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$; même sens $\Rightarrow$ croissante
Périodique	$f(x + T) = f(x)$ et $x \pm T \in D$
Partie entière	$E(x) = m \iff m \in \mathbb{Z} \text{ et } m \leq x < m + 1$