

Cours — Chapitre 03

Les applications

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

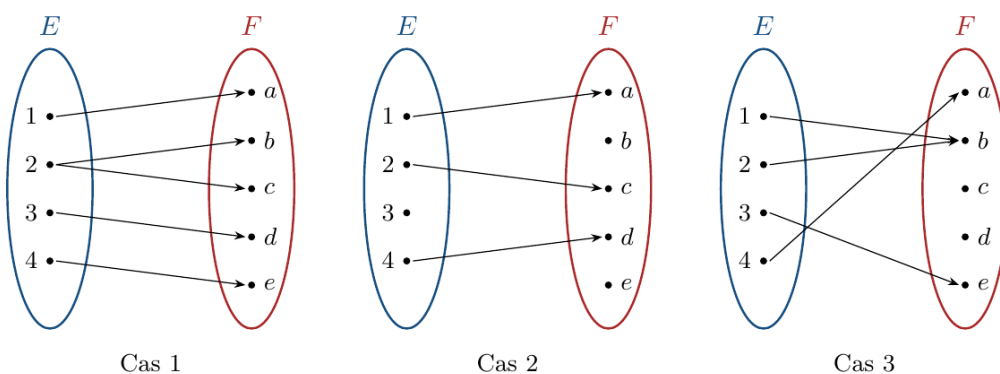
Plan du chapitre. Activités préparatoires — 1. Image directe d'une partie — 2. Image réciproque d'une partie — 3. Égalité de deux applications — 4. Restriction et prolongement — 5. Application injective — 6. Application surjective — 7. Application bijective — 8. Bijection réciproque — 9. Composition des applications — Résumé.

Prérequis. Chapitre 02 (ensembles, inclusion, égalité par double inclusion) et chapitre 01 (quantificateurs, raisonnements). Les applications servent ensuite dans tout le programme (fonctions numériques, suites, barycentre, trigonométrie).

Activités préparatoires

Activité 1 — Qu'est-ce qu'une application ?

On pose $E = \{1; 2; 3; 4\}$ et $F = \{a; b; c; d; e\}$. Dans chaque cas, f est une relation de E vers F (une flèche relie x à l'élément qui lui est associé). Dire dans quel cas f est une application, en justifiant.



Solution

Cas 1 : l'élément 2 est associé à **deux** éléments (b et c) : f n'est pas une application. **Cas 2 :** l'élément 3 n'est associé à **aucun** élément : f n'est pas une application. **Cas 3 :** chaque élément de E est associé à **un et un seul** élément de F : f est une application (peu importe que b ait deux antécédents ou que c et d n'en aient pas).

Définition 1 : Application, image, antécédent

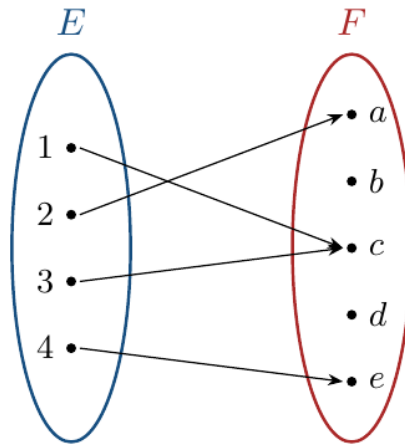
Soient E et F deux ensembles non vides.

- Une **application** f de E vers F est une relation qui associe à **chaque** élément x de E **un unique** élément y de F , noté $y = f(x)$. On écrit $f : E \rightarrow F$, $x \mapsto f(x)$; E est l'ensemble de **départ**, F l'ensemble d'**arrivée**.
- En langage logique : f est une application de E vers $F \iff (\forall x \in E)(\exists! y \in F) \ y = f(x)$.
- Pour $x \in E$, l'élément $f(x)$ est l'**image** de x par f .
- Pour $y \in F$, tout $x \in E$ tel que $f(x) = y$ est un **antécédent** de y par f ; un élément de F peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents.

Activité 2 et 3 — Images et antécédents

On garde $E = \{1; 2; 3; 4\}$, $F = \{a; b; c; d; e\}$ et l'application $f : E \rightarrow F$ représentée ci-dessous.

1. Donner $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ puis, pour $A = \{1; 3; 4\}$, l'ensemble $\{f(x) / x \in A\}$.
2. Donner l'ensemble des antécédents de a , de b et de c . Pour $C = \{a; b; c\}$, donner l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) \in C$.

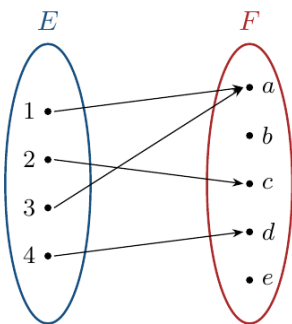
**Solution**

1. $f(2) = a$, $f(3) = c$, $f(4) = e$; pour $A = \{1; 3; 4\}$: $\{f(1); f(3); f(4)\} = \{c; e\}$. Cet ensemble s'appellera **l'image directe** de A , notée $f(A)$.
2. Antécédents de a : $\{2\}$; de b : $\emptyset$; de c : $\{1; 3\}$. Les x tels que $f(x) \in C$ forment $\{1; 2; 3\}$: c'est **l'image réciproque** de C , notée $f^{-1}(C)$. On a bien : $x \in f^{-1}(C) \iff f(x) \in C$.

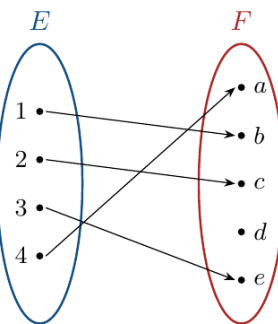
Activité 4 — Au plus un antécédent

Avec $E = \{1; 2; 3; 4\}$ et $F = \{a; b; c; d; e\}$:

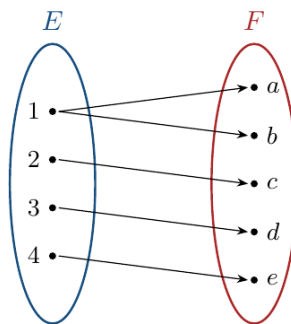
1. Dans quelles situations f est-elle une application de E vers F ?
2. On note P : « tout élément de F a au plus un antécédent par f ». Dans quelles situations (parmi les applications) P est-elle vraie ?
3. Écrire P avec des quantificateurs.



Situation 1



Situation 2



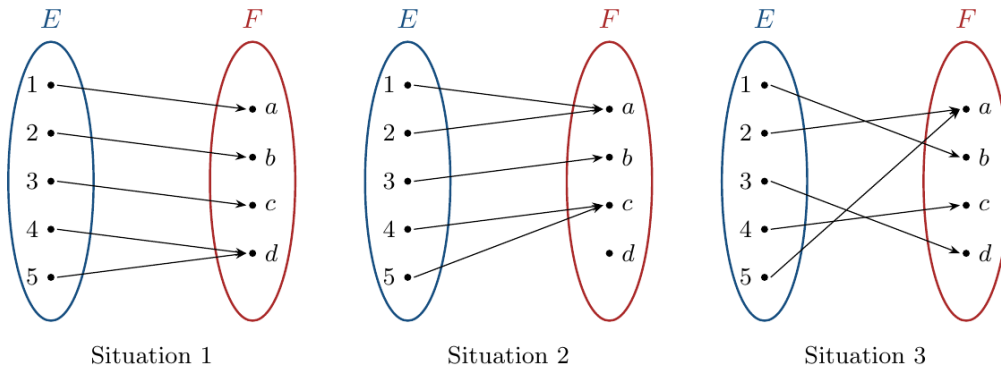
Situation 3

Solution

1. Situations 1 et 2 (1 a deux images dans la situation 3).
2. Situation 1 : a a deux antécédents (1 et 3), P est fausse. Situation 2 : chaque élément de F a au plus un antécédent, P est vraie.
3. $P : (\forall (x; x') \in E^2) (f(x) = f(x') \implies x = x')$.

Activité 5 — Au moins un antécédent

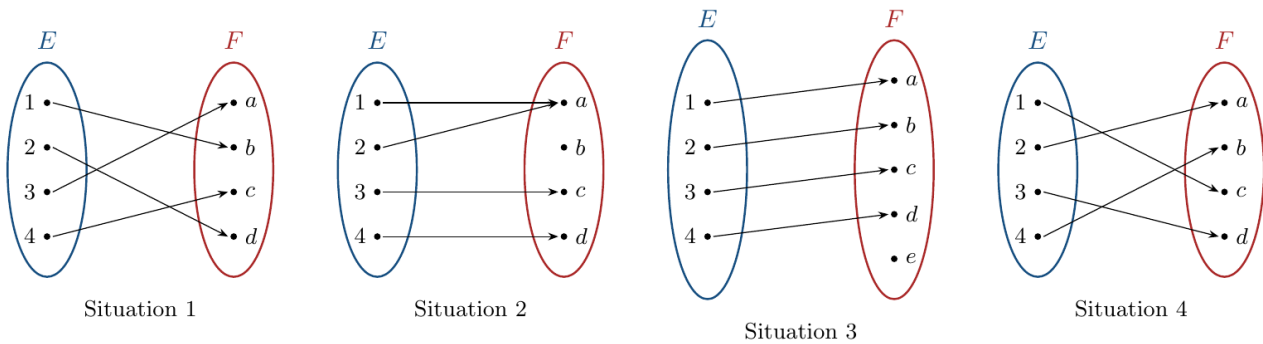
On pose $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $F = \{a; b; c; d\}$; dans chaque situation f est une application de E vers F . Soit P : « tout élément de F a au moins un antécédent par f ». Dans quelles situations P est-elle vraie ? Écrire P avec des quantificateurs.

**Solution**

P est vraie dans les situations 1 et 3; elle est fausse dans la situation 2 (d n'a aucun antécédent). $P : (\forall y \in F)(\exists x \in E) \ y = f(x)$.

Activité 6 — Exactement un antécédent

Dans chaque situation, f est une application de $E = \{1; 2; 3; 4\}$ vers F ($F = \{a; b; c; d\}$, sauf dans la situation 3 où $F = \{a; b; c; d; e\}$). Soit $P : \ll \text{tout élément de } F \text{ a exactement un antécédent par } f \gg$. Dans quelles situations P est-elle vraie? Écrire P avec des quantificateurs.

**Solution**

P est vraie dans les situations 1 et 4. Elle est fausse dans la situation 2 (a a deux antécédents, b aucun) et dans la situation 3 (e n'a pas d'antécédent). $P : (\forall y \in F)(\exists! x \in E) \ y = f(x)$.

I. Image directe et image réciproque d'une partie**1. Image directe d'une partie****Définition 2 : Image directe**

Soient $f : E \rightarrow F$ une application et A une partie de E . L'**image directe** de A par f est la partie de F :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

- $y \in f(A) \iff (\exists x \in A) \ y = f(x)$; en particulier : $x \in A \implies f(x) \in f(A)$.
- Pour une partie C de F : $f(A) \subset C \iff (\forall x \in A) \ f(x) \in C$; $C \subset f(A) \iff (\forall y \in C)(\exists x \in A) \ f(x) = y$.
- Donc $f(A) = C \iff [(\forall x \in A) \ f(x) \in C] \text{ et } [(\forall y \in C)(\exists x \in A) \ f(x) = y]$ (double inclusion).
- On a toujours $f(A) \subset f(E) \subset F$.

Exemple 1

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Montrer que $f(\{-3; -1; 0; 1; 3\}) = \{0; 1; 9\}$.

Solution

$f(-3) = f(3) = 9$, $f(-1) = f(1) = 1$ et $f(0) = 0$. Donc $f(\{-3; -1; 0; 1; 3\}) = \{9; 1; 0\} = \{0; 1; 9\}$ (un élément n'est écrit qu'une fois).

Exemple 2

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (\sqrt{x} - 1)^2 + 2$. Déterminer $f([0; 9])$.

Solution

Inclusion $f([0; 9]) \subset [2; 6]$. Soit $x \in [0; 9]$. Alors $0 \leq \sqrt{x} \leq 3$, donc $-1 \leq \sqrt{x} - 1 \leq 2$, d'où $0 \leq (\sqrt{x} - 1)^2 \leq 4$ (le carré d'un réel de $[-1; 2]$ est dans $[0; 4]$) et $2 \leq f(x) \leq 6$.

Inclusion $[2; 6] \subset f([0; 9])$. Soit $y \in [2; 6]$. Posons $x = (1 + \sqrt{y - 2})^2$. Comme $0 \leq \sqrt{y - 2} \leq 2$, on a $1 \leq \sqrt{x} = 1 + \sqrt{y - 2} \leq 3$, donc $x \in [1; 9] \subset [0; 9]$, et $f(x) = (\sqrt{y - 2})^2 + 2 = y$.

Conclusion : $f([0; 9]) = [2; 6]$.

Propriété

Soient $f : E \rightarrow F$ une application et A, B deux parties de E .

- $A = \emptyset \iff f(A) = \emptyset$;
- $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$;
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ et $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ (l'inclusion peut être stricte).

Démonstration : voir l'exercice 10 de la série du chapitre 03.

Remarque

L'inclusion $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ peut être stricte : avec $f(x) = x^2$, $A = \{-2\}$ et $B = \{2\}$, on a $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$ alors que $f(A) \cap f(B) = \{4\}$.

Exemple 3

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - 3x$. Déterminer $f([-2; -1] \cup [0; 1])$.

Solution

Soient $x, x' \in \mathbb{R} : x \leq x' \iff -3x \geq -3x' \iff f(x) \geq f(x')$. Pour $x \in [-2; -1] : f(-1) \leq f(x) \leq f(-2)$, soit $4 \leq f(x) \leq 7$; et tout $y \in [4; 7]$ est atteint par $x = \frac{1-y}{3} \in [-2; -1]$. Donc $f([-2; -1]) = [4; 7]$. De même $f([0; 1]) = [f(1); f(0)] = [-2; 1]$. Par la propriété : $f([-2; -1] \cup [0; 1]) = [-2; 1] \cup [4; 7]$.

2. Image réciproque d'une partie**Définition 3 : Image réciproque**

Soient $f : E \rightarrow F$ une application et C une partie de F . L'**image réciproque** de C par f est la partie de E :

$$f^{-1}(C) = \{x \in E / f(x) \in C\} \quad ; \quad x \in f^{-1}(C) \iff f(x) \in C.$$

Pour une partie A de E : $f^{-1}(C) = A \iff (\forall x \in E) (f(x) \in C \iff x \in A)$.

Attention

La notation $f^{-1}(C)$ a un sens pour **toute** application f (même non bijective) : c'est l'ensemble des antécédents des éléments de C . Elle ne suppose pas l'existence d'une bijection réciproque (partie III, paragraphe 4).

Exemple 4

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Déterminer $f^{-1}(\{0; 9; 16; 5; -4\})$.

Solution

$x^2 = 0 \iff x = 0$; $x^2 = 9 \iff x \in \{-3; 3\}$; $x^2 = 16 \iff x \in \{-4; 4\}$; $x^2 = 5 \iff x \in \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$; $x^2 = -4$ n'a pas de solution réelle. Donc $f^{-1}(\{0; 9; 16; 5; -4\}) = \{-4; -3; -\sqrt{5}; 0; \sqrt{5}; 3; 4\}$.

Propriété

Soient $f : E \rightarrow F$ une application et C, D deux parties de F .

- $f^{-1}(F) = E$; $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$;
- $C \subset D \implies f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$;
- $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ et $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Démonstration : voir l'exercice 10 de la série du chapitre 03. Attention : $f^{-1}(C) = \emptyset$ n'entraîne pas $C = \emptyset$ (exemple 4 : $f^{-1}(\{-4\}) = \emptyset$).

Exemple 5

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 4x$.

1. Déterminer $f^{-1}([-4; 0])$ et $f^{-1}([5; +\infty[)$.
2. Déterminer $f^{-1}([-4; 0] \cap [5; +\infty[)$ et vérifier la propriété sur l'intersection.

Solution

1. $x \in f^{-1}([-4; 0]) \iff -4 \leq x^2 - 4x \leq 0$. L'inégalité $x^2 - 4x \geq -4$ équivaut à $(x - 2)^2 \geq 0$, toujours vraie; et $x^2 - 4x = x(x - 4) \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 4$. Donc $f^{-1}([-4; 0]) = [0; 4]$. $x \in f^{-1}([5; +\infty[) \iff x^2 - 4x - 5 \geq 0 \iff (x - 5)(x + 1) \geq 0 \iff x \leq -1$ ou $x \geq 5$. Donc $f^{-1}([5; +\infty[) =] - \infty; -1] \cup [5; +\infty[$.
2. $[-4; 0] \cap [5; +\infty[= \emptyset$, donc $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$; et $[0; 4] \cap (] - \infty; -1] \cup [5; +\infty[) = \emptyset$: les deux membres sont égaux.

II. Égalité, restriction et prolongement**1. Égalité de deux applications****Définition 4 : Applications égales**

Deux applications $f : E \rightarrow F$ et $g : E' \rightarrow F'$ sont **égales** ($f = g$) si elles ont le même ensemble de départ, le même ensemble d'arrivée et les mêmes images :

$$f = g \iff \begin{cases} E = E' \text{ et } F = F', \\ (\forall x \in E) \quad f(x) = g(x). \end{cases}$$

Exemple 6

Montrer que les applications $f :] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos^4 x - \sin^4 x$ et $g :] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ sont égales.

Solution

Elles ont le même départ et la même arrivée. Soit $x \in] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$; alors $\cos x \neq 0$. $f(x) = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x$. $g(x) = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \cos^2 x - \sin^2 x$. Donc $f = g$.

2. Restriction et prolongement**Définition 5 : Restriction**

Soient $f : E \rightarrow F$ une application et A une partie de E . La **restriction** de f à A est l'application $g : A \rightarrow F$, $x \mapsto f(x)$; on la note parfois $f|_A$. Ainsi $g : A \rightarrow F$ est la restriction de f à $A \iff A \subset E$ et $(\forall x \in A) \quad g(x) = f(x)$.

Exemple 7

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x + |x - 1|$. Déterminer l'expression de la restriction g de f à $] - \infty; 1]$.

Solution

Pour $x \leq 1$, $x - 1 \leq 0$ donc $|x - 1| = 1 - x$ et $g(x) = 3x + 1 - x = 2x + 1$. Ainsi $g :] - \infty; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + 1$.

Définition 6 : Prolongement

Soient $f : E \rightarrow F$ une application et G un ensemble tel que $E \subset G$. Un **prolongement** de f à G est une application $h : G \rightarrow F$ telle que $(\forall x \in E) h(x) = f(x)$; autrement dit, f est la restriction de h à E .

Exemple 8

Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^3 - 2x}{x}$. Déterminer un prolongement de f à $\mathbb{R}$.

Solution

Pour $x \neq 0$: $f(x) = x^2 - 2$. L'application $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 2$ vérifie $h(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: c'est un prolongement de f à $\mathbb{R}$. Il n'est pas unique : toute application qui coïncide avec f sur $\mathbb{R}^*$ et prend une valeur quelconque en 0 convient ; celui-ci est le plus « naturel ».

III. Applications injectives, surjectives, bijectives**1. Application injective****Définition 7 : Injection**

Une application $f : E \rightarrow F$ est **injective** (on dit aussi que f est une injection) si tout élément de F admet **au plus un** antécédent par f :

$$f \text{ injective} \iff (\forall (x; x') \in E^2) (f(x) = f(x') \implies x = x').$$

Par contraposée, cela équivaut à : $(\forall (x; x') \in E^2) x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$. Par négation :

$$f \text{ non injective} \iff (\exists (x; x') \in E^2) f(x) = f(x') \text{ et } x \neq x'.$$

Méthode

Pour montrer que f est injective, on fixe $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$ et on démontre $x = x'$. Pour montrer qu'elle ne l'est pas, on exhibe **deux éléments distincts de même image**.

Exemple 9

Soit $f : [-2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 4x - 1$. Montrer que f est injective.

Solution

Soient $x, x' \in [-2; +\infty[$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors $x^2 - x'^2 + 4(x - x') = 0$, soit $(x - x')(x + x' + 4) = 0$. Or $x \geq -2$ et $x' \geq -2$ donnent $x + x' + 4 \geq 0$, avec égalité seulement si $x = x' = -2$. Dans tous les cas $x = x'$: f est injective.

Exemple 10

1. Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 3 - \frac{4}{x^2}$.
 - a. Déterminer $f^{-1}(\{2\})$.
 - b. En déduire que f n'est pas injective.
2. Soit g la restriction de f à $]0; +\infty[$. Montrer que g est injective.

Solution

1. a. Pour $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = 2 \iff \frac{4}{x^2} = 1 \iff x^2 = 4 \iff x \in \{-2; 2\}$. Donc $f^{-1}(\{2\}) = \{-2; 2\}$.
 - b. $f(-2) = f(2)$ avec $-2 \neq 2$: f n'est pas injective.

2. Soient $x, x' > 0$ tels que $g(x) = g(x') : \frac{4}{x^2} = \frac{4}{x'^2}$, donc $x^2 = x'^2$, puis $x = x'$ car x et x' sont positifs. g est injective.

2. Application surjective

Définition 8 : Surjection

Une application $f : E \rightarrow F$ est **surjective** (ou est une surjection) si tout élément de F admet **au moins un** antécédent par f :

$$f \text{ surjective} \iff (\forall y \in F)(\exists x \in E) \ y = f(x) \iff f(E) = F.$$

Par négation : f n'est pas surjective $\iff$ il existe $y \in F$ sans antécédent $\iff f(E) \neq F$.

Méthode

Pour montrer que f est surjective, on fixe $y \in F$, on **résout** l'équation $f(x) = y$ et on **vérifie** que la solution trouvée appartient à E .

Exemple 11

Montrer que l'application $f :]2; +\infty[\rightarrow]1; +\infty[$, $x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$ est surjective.

Solution

f est bien à valeurs dans $]1; +\infty[$: pour $x > 2$, $f(x) = 1 + \frac{3}{x-2} > 1$. Soit $y \in]1; +\infty[$. Pour $x > 2$:
 $f(x) = y \iff x + 1 = y(x - 2) \iff x(y - 1) = 2y + 1 \iff x = \frac{2y + 1}{y - 1}$ (car $y \neq 1$). Ce réel convient :
 $x - 2 = \frac{3}{y - 1} > 0$, donc $x \in]2; +\infty[$ et $f(x) = y$. Ainsi f est surjective.

Exemple 12

- On reprend l'application g de l'exemple 10 ($g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 3 - \frac{4}{x^2}$).
 - Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation $g(x) = 3$.
 - En déduire que g n'est pas surjective.
- Montrer que l'application $h :]0; +\infty[\rightarrow]-\infty; 3[$, $x \mapsto 3 - \frac{4}{x^2}$ est surjective.

Solution

- $g(x) = 3 \iff \frac{4}{x^2} = 0$, ce qui est impossible : l'ensemble des solutions est vide.
 - Le réel 3 de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ n'a pas d'antécédent : g n'est pas surjective.
- Pour $x > 0$, $\frac{4}{x^2} > 0$ donc $h(x) < 3$: h est bien à valeurs dans $] -\infty; 3[$. Soit $y < 3$. Pour $x > 0$:
 $h(x) = y \iff x^2 = \frac{4}{3 - y} \iff x = \frac{2}{\sqrt{3 - y}}$ (car $3 - y > 0$ et $x > 0$). Ce réel est dans $]0; +\infty[$: h est surjective.

Remarque

Les applications g et h ont la même expression mais **pas le même ensemble d'arrivée** : elles ne sont pas égales, et la surjectivité dépend de l'ensemble d'arrivée.

3. Application bijective

Définition 9 : Bijection

Une application $f : E \rightarrow F$ est **bijective** (ou est une bijection) si tout élément de F admet **exactement un** antécédent par f :

$$f \text{ bijective} \iff (\forall y \in F)(\exists! x \in E) \ y = f(x) \iff f \text{ est injective et surjective.}$$

Par négation : f n'est pas bijective $\iff f$ n'est pas injective **ou** n'est pas surjective.

Exemple 13

Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow [-2; 1[$, $x \mapsto \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2}$ est bijective.

Solution

Valeurs. Pour $x \geq 0$: $f(x) = 1 - \frac{6}{x^2 + 2}$; comme $x^2 + 2 \geq 2$, on a $0 < \frac{6}{x^2 + 2} \leq 3$, donc $-2 \leq f(x) < 1$.

Existence et unicité de l'antécédent. Soit $y \in [-2; 1[$. Pour $x \geq 0$:

$$f(x) = y \iff x^2 - 4 = y(x^2 + 2) \iff x^2(1 - y) = 2y + 4 \iff x^2 = \frac{2y + 4}{1 - y} \iff x = \sqrt{\frac{2y + 4}{1 - y}},$$

la dernière équivalence venant de $x \geq 0$ et de $\frac{2y+4}{1-y} \geq 0$ (car $2y + 4 \geq 0$ et $1 - y > 0$). Chaque $y \in [-2; 1[$ a donc exactement un antécédent dans $\mathbb{R}_+$: f est bijective.

4. Bijection réciproque

Définition 10 : Bijection réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection. L'application qui à chaque $y \in F$ associe son **unique** antécédent par f est une application de F vers E appelée **bijection réciproque** de f , notée $f^{-1} : F \rightarrow E$. Elle est caractérisée par :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x \in E \end{cases} \iff \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in F \end{cases}$$

Méthode

Pour déterminer f^{-1} : on fixe $y \in F$, on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$; son unique solution est $f^{-1}(y)$.

Exemple 14

Déterminer la bijection réciproque de l'application f de l'exemple 13.

Solution

D'après la résolution de l'exemple 13 : $f^{-1} : [-2; 1[\rightarrow \mathbb{R}_+$, $y \mapsto \sqrt{\frac{2y + 4}{1 - y}}$. *Vérification* : $f^{-1}(-2) = 0$ et $f(0) = -2$.

IV. Composition des applications

Définition 11 : Composée

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. L'application $h : E \rightarrow G$ définie par $h(x) = g(f(x))$ est la **composée** de f suivie de g ; on la note $g \circ f$ (« g rond f ») : on applique d'abord f , puis g .

$$g \circ f : E \rightarrow G \quad \text{et} \quad (\forall x \in E) \ (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Exemple 15

On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2 + 1$ et $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2\sqrt{x} - 1$. Déterminer les expressions de $g \circ f$, $f \circ g$ et $f \circ f$.

Solution

- $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (g \circ f)(x) = g(x^2 + 1) = 2\sqrt{x^2 + 1} - 1$.
 - $f \circ g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ : (f \circ g)(x) = (2\sqrt{x} - 1)^2 + 1 = 4x - 4\sqrt{x} + 2$.
 - $f \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ (l'arrivée $\mathbb{R}_+$ de f est contenue dans son départ $\mathbb{R}$) : $(f \circ f)(x) = (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$.
- On constate que $g \circ f \neq f \circ g$ (ni même ensemble de départ, ni même expression).

Remarque

- La composition n'est **pas commutative** en général : $g \circ f \neq f \circ g$.
- Elle est **associative** : si $h : D \rightarrow E, f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$, alors $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$, que l'on note $g \circ f \circ h$.
- L'**identité** de E est $\text{Id}_E : E \rightarrow E, x \mapsto x$; pour toute $f : E \rightarrow F, f \circ \text{Id}_E = f$ et $\text{Id}_F \circ f = f$.

Propriété

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- Si f est bijective : $(\forall y \in F) (f \circ f^{-1})(y) = y$ et $(\forall x \in E) (f^{-1} \circ f)(x) = x$, c'est-à-dire $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$.

Solution

Démonstration. Injectivité. Soient $x, x' \in E$ tels que $g(f(x)) = g(f(x'))$. Comme g est injective, $f(x) = f(x')$; comme f est injective, $x = x'$. **Surjectivité.** Soit $z \in G$. g étant surjective, il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$; f étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Alors $(g \circ f)(x) = z$. **Bijectivité.** Elle découle des deux points précédents. Soit $z \in G$ et $x = f^{-1}(g^{-1}(z))$: alors $g(f(x)) = g(g^{-1}(z)) = z$, donc x est l'unique antécédent de z par $g \circ f$, c'est-à-dire $(g \circ f)^{-1}(z) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$. **Identités.** Pour $y \in F, f^{-1}(y)$ est un antécédent de y , donc $f(f^{-1}(y)) = y$. Pour $x \in E, x$ est l'antécédent de $f(x)$, donc $f^{-1}(f(x)) = x$.

Application 1 : décomposer une application

Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 3$ et $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$. On pose $w = v \circ u$.

1. Montrer que u est bijective et déterminer u^{-1} .
2. Montrer que $w(x) = (2x + 3)^3$ et que w est injective.

Solution

1. Soit $y \in \mathbb{R} : 2x + 3 = y \iff x = \frac{y-3}{2}$, unique solution réelle. Donc u est bijective et $u^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$.
2. $w(x) = v(u(x)) = (2x + 3)^3$. v est injective : si $a^3 = b^3$, alors $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = 0$ et $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$ ne s'annule que pour $a = b = 0$; donc $a = b$. u et v étant injectives, $w = v \circ u$ est injective.

Résumé : les applications

Notion	Définition / caractérisation	Méthode
Application $f : E \rightarrow F$	$(\forall x \in E)(\exists! y \in F) y = f(x)$	chaque x a une et une seule image
Image directe	$y \in f(A) \iff (\exists x \in A) y = f(x)$	double inclusion
Image réciproque	$x \in f^{-1}(C) \iff f(x) \in C$	résoudre $f(x) \in C$
Injective	$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$	au plus un antécédent
Surjective	$(\forall y \in F)(\exists x \in E) y = f(x)$, i.e. $f(E) = F$	résoudre $f(x) = y$ et vérifier $x \in E$
Bijective	$(\forall y \in F)(\exists! x \in E) y = f(x)$	injective et surjective
Réciproque	$y = f(x), x \in E \iff x = f^{-1}(y), y \in F$	$f \circ f^{-1} = \text{Id}_F, f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$
Composée	$(g \circ f)(x) = g(f(x))$	$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$