

Cours — Chapitre 02

Les ensembles

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. 1. Extension et compréhension — 2. Inclusion et égalité — 3. Ensemble des parties — 4. Complémentaire — 5. Intersection — 6. Réunion — 7. Règles de calcul — 8. Différence — 9. Différence symétrique — 10. Produit cartésien — Exercice de révision.

Lien avec le chapitre 01. Chaque opération sur les ensembles traduit un connecteur logique : « et » $\leftrightarrow \cap$, « ou » $\leftrightarrow \cup$, négation $\leftrightarrow$ complémentaire, implication $\leftrightarrow \subset$, équivalence $\leftrightarrow =$. Les démonstrations utilisent donc les lois logiques et les raisonnements du chapitre 01.

I. Généralités sur les ensembles

1. Écriture en extension et en compréhension

Définition 1 : Ensemble, élément

Un **ensemble** E est une collection d'objets appelés **éléments**. Si x est un élément de E , on écrit $x \in E$ (« x appartient à E »); sinon on écrit $x \notin E$. L'ensemble qui ne contient aucun élément est l'**ensemble vide**, noté $\emptyset$.

On décrit un ensemble :

- **en extension** : en énumérant ses éléments entre accolades, par exemple $\{1; 3; 5\}$;
- **en compréhension** : par une propriété caractéristique de ses éléments, $A = \{x \in E \mid P(x)\}$, ce qui signifie : $(\forall x \in E) \ x \in A \iff P(x)$.

Un **diagramme de Venn** représente un ensemble par une région du plan limitée par une courbe fermée.

Exemple 1

1. Écrire en extension : $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid -\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{5}{2}\right\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 5 = 0\}$; $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x(x - 2)(x^2 - 3) = 0\}$.

2. Écrire en compréhension : $E = \{1; 4; 7; 10; \dots\}$; $F = \{2; 6; 10; 14; \dots\}$; $G = \{1; 8; 27; 64; \dots\}$.

Solution

1. $-\frac{7}{3} \approx -2,33$ et $\frac{5}{2} = 2,5$, donc $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Le discriminant de $x^2 + 2x + 5$ est $4 - 20 = -16 < 0$, donc $B = \emptyset$. $x(x - 2)(x^2 - 3) = 0 \iff x \in \{0; 2; -\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$ et $\pm\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$, donc $C = \{0; 2\}$.

2. $E = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$; $F = \{4k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$; $G = \{n^3 \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

2. Inclusion et égalité

Définition 2 : Inclusion, égalité

Soient A et B deux parties d'un ensemble E .

- A est **incluse** dans B , et on note $A \subset B$, si tout élément de A appartient à B : $A \subset B \iff (\forall x \in E) \ (x \in A \implies x \in B)$.
- Par négation : $A \not\subset B \iff (\exists x \in E) \ (x \in A \text{ et } x \notin B)$.
- $A = B \iff (\forall x \in E) \ (x \in A \iff x \in B)$, c'est-à-dire $A = B \iff (A \subset B \text{ et } B \subset A)$ (**double inclusion**).
- **Transitivité** : si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.

Remarque

- Pour tout ensemble A : $\emptyset \subset A$ et $A \subset A$.
- Pour montrer $A \subset B$, on prend un élément **quelconque** x de A et on montre que $x \in B$ (raisonnement

direct). Pour montrer $A \not\subset B$, il suffit d'un **contre-exemple** : un élément de A qui n'est pas dans B .

Exemple 2

On considère $A = \{-5; -1; 0; 2\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{Z} / \frac{6}{|x|+1} \in \mathbb{Z}\right\}$, $C = \{6k + 1 / k \in \mathbb{Z}\}$ et $D = \left\{\frac{2k' + 1}{3} / k' \in \mathbb{Z}\right\}$. Montrer que $A \subset B$, que $C \subset D$ et que $D \not\subset C$.

Solution

- Pour $x \in \mathbb{Z}$, $|x|+1 \in \mathbb{N}^*$; donc $\frac{6}{|x|+1} \in \mathbb{Z} \iff |x|+1 \text{ divise } 6 \iff |x|+1 \in \{1; 2; 3; 6\} \iff |x| \in \{0; 1; 2; 5\}$. Ainsi $B = \{-5; -2; -1; 0; 1; 2; 5\}$ et chaque élément de A est dans B : $A \subset B$.
- Soit $x \in C$: $x = 6k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Alors $x = \frac{18k + 3}{3} = \frac{2(9k + 1) + 1}{3}$ avec $k' = 9k + 1 \in \mathbb{Z}$, donc $x \in D$. Ainsi $C \subset D$.
- $\frac{1}{3} \in D$ (avec $k' = 0$) mais $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$, donc $\frac{1}{3} \notin C$: $D \not\subset C$.

Exemple 3

Soit $A = \left\{x \in \mathbb{R} / \left|\frac{x}{3} - 1\right| < 2\right\}$ et $B =]-3; 9[$. Montrer que $A = B$.

Solution

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x \in A \iff -2 < \frac{x}{3} - 1 < 2 \iff -1 < \frac{x}{3} < 3 \iff -3 < x < 9 \iff x \in B$ (on ajoute 1, puis on multiplie par $3 > 0$: étapes réversibles). Donc $A = B$.

3. Ensemble des parties d'un ensemble

Définition 3 : Ensemble des parties

L'ensemble de toutes les parties (sous-ensembles) d'un ensemble E est noté $\mathcal{P}(E)$.

- $A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$; en particulier $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.
- $a \in E \iff \{a\} \in \mathcal{P}(E) \iff \{a\} \subset E$.
- Si E est fini à n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ possède 2^n éléments.

Attention

Ne pas confondre $\in$ (relation entre un **élément** et un ensemble) et $\subset$ (relation entre deux **ensembles**). Par exemple $a \in E$, $\{a\} \subset E$, $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$, mais « $a \subset E$ » n'a pas de sens si a n'est pas un ensemble.

Exemple 4

Soient $E = \{1; 2\}$ et $F = \{1; 2; 3\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(F)$.

Solution

$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{1; 2\}\}$ ($2^2 = 4$ éléments). $\mathcal{P}(F) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}\}$ ($2^3 = 8$ éléments).

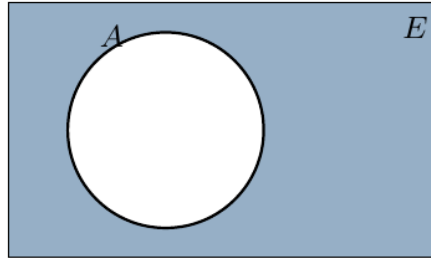
4. Complémentaire d'une partie

Définition 4 : Complémentaire

Soit A une partie de E . Le **complémentaire** de A dans E , noté $\complement_E A$ ou $\overline{A}$, est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A :

$$\overline{A} = \{x \in E / x \notin A\} \quad \text{et} \quad (\forall x \in E) \quad x \in \overline{A} \iff x \notin A.$$

- $\overline{\overline{E}} = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = E$, $\overline{\overline{A}} = A$.
- Si $A = \{x \in E / P(x)\}$, alors $\overline{A} = \{x \in E / \overline{P(x)}\}$.



La partie colorée représente $\bar{A}$.

Exemple 5

1. Soient $A =]-\infty; 2]$ et $B = \{x \in \mathbb{N} / x^2 - 5x > 0\}$. Déterminer $\complement_{\mathbb{R}} A$ et $\complement_{\mathbb{N}} B$.
2. Soient A et B deux parties de E . Montrer que $A \subset B \iff \bar{B} \subset \bar{A}$.

Solution

1. $\complement_{\mathbb{R}} A =]2; +\infty[$. Pour $x \in \mathbb{N} : x^2 - 5x = x(x - 5) > 0 \iff x > 5$ (car $x \geq 0$ et pour $x = 0$ le produit est nul). Donc $B = \{x \in \mathbb{N} / x \geq 6\}$ et $\complement_{\mathbb{N}} B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.
2. $A \subset B \iff (\forall x \in E) (x \in A \Rightarrow x \in B) \iff (\forall x \in E) (x \notin B \Rightarrow x \notin A)$ (contraposée)
 $\iff (\forall x \in E) (x \in \bar{B} \Rightarrow x \in \bar{A}) \iff \bar{B} \subset \bar{A}$.

II. Opérations sur les ensembles

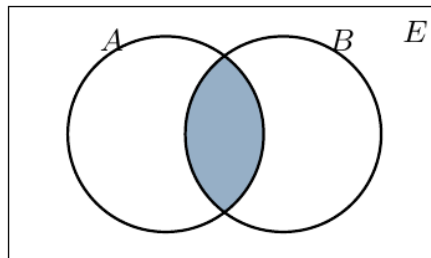
1. Intersection

Définition 5 : Intersection

L'**intersection** de deux parties A et B de E est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B :

$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\} \quad ; \quad x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B).$$

Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont **disjointes**.



La partie colorée représente $A \cap B$.

Propriété

Pour toutes parties A, B, C de E : $A \cap B = B \cap A$; $A \cap A = A$; $A \cap \bar{A} = \emptyset$; $A \cap E = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$;
 $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$; $A \subset B \iff A \cap B = A$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativité).

Solution

Preuve de $A \subset B \iff A \cap B = A$. ($\Rightarrow$) On a toujours $A \cap B \subset A$. Si $A \subset B$ et $x \in A$, alors $x \in B$, donc $x \in A \cap B$: $A \subset A \cap B$. D'où l'égalité. ($\Leftarrow$) Si $A \cap B = A$, alors $A = A \cap B \subset B$.

Exemple 6

Soient $A = \{x \in \mathbb{R} / |x + 1| < 4\}$ et $B = \{x \in \mathbb{Z} / x \geq -1\}$. Déterminer $A \cap B$ en extension.

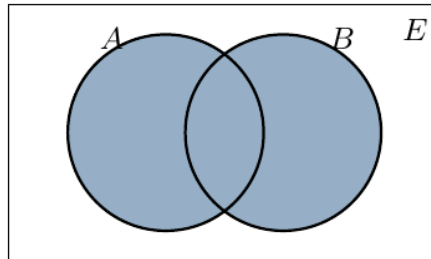
Solution

$|x + 1| < 4 \iff -4 < x + 1 < 4 \iff -5 < x < 3$, donc $A =] - 5; 3[$. Ainsi $A \cap B = \{x \in \mathbb{Z} / -1 \leq x < 3\} = \{-1; 0; 1; 2\}$.

2. Réunion**Définition 6 : Réunion**

La **réunion** de A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B (éventuellement aux deux) :

$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\} \quad ; \quad x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B).$$



La partie colorée représente $A \cup B$.

Propriété

$A \cup B = B \cup A$; $A \cup A = A$; $A \cup \bar{A} = E$; $A \cup E = E$; $A \cup \emptyset = A$; $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$; $A \subset B \iff A \cup B = B$; $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativité).

Exemple 7

Soient $A = \{x \in \mathbb{N} / x^2 < 30\}$ et $B = \{x \in \mathbb{Z} / |x - 2| \leq 3\}$. Déterminer $A \cup B$ en extension, puis en compréhension.

Solution

$x \in \mathbb{N}$ et $x^2 < 30 \iff x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ (car $5^2 = 25 < 30 \leq 36 = 6^2$). $|x - 2| \leq 3 \iff -1 \leq x \leq 5$, donc $B = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Ainsi $A \cup B = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\} = \{x \in \mathbb{Z} / -1 \leq x \leq 5\}$.

3. Règles de calcul**Propriété**

Pour toutes parties A, B, C de E :

- **Lois de Morgan** : $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.
- **Distributivité** : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $(A \subset B \text{ et } A \subset C) \iff A \subset B \cap C$; $(A \subset C \text{ et } B \subset C) \iff A \cup B \subset C$.
- $(A \subset B \text{ ou } A \subset C) \implies A \subset B \cup C$ (la réciproque est fausse).

Méthode

Pour démontrer une égalité d'ensembles, on traduit l'appartenance par une proposition logique et on applique la **loi logique** correspondante : Morgan pour les complémentaires, distributivité de « et » / « ou » pour $\cap$ / $\cup$.

Solution

Morgan. Pour $x \in E$: $x \in \overline{A \cap B} \iff \overline{x \in A \text{ et } x \in B} \iff (x \notin A \text{ ou } x \notin B) \iff x \in \bar{A} \cup \bar{B}$. De même pour l'autre loi.

Distributivité. $x \in A \cap (B \cup C) \iff [x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C)] \iff [(x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C)] \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Inclusions. $(A \subset B \text{ et } A \subset C) \iff (\forall x)[(x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ et } (x \in A \Rightarrow x \in C)] \iff (\forall x)[x \in A \Rightarrow (x \in B \text{ et } x \in C)] \iff (\forall x)[x \in A \Rightarrow x \in B \cup C]$

$B \text{ et } x \in C] \iff A \subset B \cap C$ (loi logique de l'exercice 5.7 de la série 01). De même $(A \subset C \text{ et } B \subset C) \iff A \cup B \subset C$ (exercice 17 de la série 01).

Contre-exemple pour la réciproque. $E = \{1; 2\}$, $A = \{1; 2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$: $A \subset B \cup C$ mais $A \not\subset B$ et $A \not\subset C$.

Application 1

Soient A, B deux parties de E . Montrer que $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap \overline{B}$ et que $(A \cup B) \cap \overline{A} = B \cap \overline{A}$.

Solution

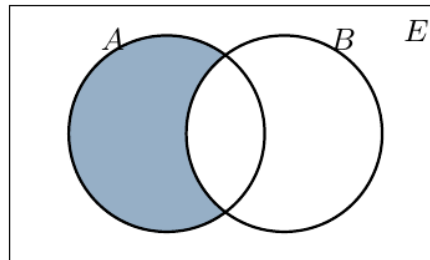
Par Morgan : $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} = A \cap \overline{B}$. Par distributivité : $(A \cup B) \cap \overline{A} = (A \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{A}) = \emptyset \cup (B \cap \overline{A}) = B \cap \overline{A}$.

4. Différence de deux ensembles

Définition 7 : Différence

La **différence** de A et B (dans cet ordre), notée $A \setminus B$ (« A privé de B »), est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B :

$$A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\} \quad ; \quad A \setminus B = A \cap \overline{B} \quad ; \quad E \setminus A = \overline{A}.$$



La partie colorée représente $A \setminus B$.

Exemple 8

Soient A, B deux parties de E . Montrer que : (1) $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B$; (2) $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$; (3) $A \subset B \iff A \setminus B = \emptyset$.

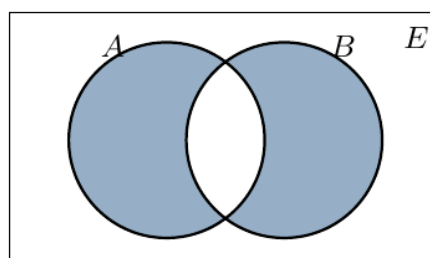
Solution

1. $\overline{A \setminus B} = \overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{\overline{B}} = \overline{A} \cup B$ (Morgan).
2. $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = A \cap (\overline{B} \cup B) = A \cap E = A$ (distributivité).
3. ($\Rightarrow$) Supposons $A \subset B$ et, par l'absurde, $A \setminus B \neq \emptyset$: il existe $x \in A$ avec $x \notin B$, ce qui contredit $A \subset B$.
 ($\Leftarrow$) Supposons $A \setminus B = \emptyset$ et soit $x \in A$; si $x \notin B$, alors $x \in A \setminus B = \emptyset$, absurde ; donc $x \in B$, et $A \subset B$.

5. Différence symétrique

Définition 8 : Différence symétrique

La **différence symétrique** de A et B est $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$: c'est l'ensemble des éléments qui appartiennent à **un seul** des deux ensembles.



La partie colorée représente $A \Delta B$.

Exemple 9

1. Pour $E = \{1; 2; \dots; 8\}$, $A = \{1; 2; 3; 5\}$ et $B = \{2; 4; 5; 6\}$, déterminer $A \Delta B$.
2. Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ et que $\overline{A} \Delta \overline{B} = A \Delta B$.

Solution

1. $A \setminus B = \{1; 3\}$ et $B \setminus A = \{4; 6\}$, donc $A \Delta B = \{1; 3; 4; 6\}$.
2. $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = [A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})] \cup [B \cap (\overline{A} \cup \overline{B})] = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = A \Delta B$
(car $A \cap \overline{A} = B \cap \overline{B} = \emptyset$). Puis $\overline{A} \Delta \overline{B} = (\overline{A} \cap \overline{\overline{B}}) \cup (\overline{\overline{B}} \cap \overline{A}) = (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A) = A \Delta B$.

Remarque

$$A \Delta B = B \Delta A; \quad A \Delta \emptyset = A; \quad A \Delta A = \emptyset; \quad A \Delta B = \emptyset \iff A = B.$$

III. Produit cartésien

Définition 9 : Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles. Le **produit cartésien** $E \times F$ est l'ensemble des **couples** $(x; y)$ tels que $x \in E$ et $y \in F$:

$$E \times F = \{(x; y) / x \in E \text{ et } y \in F\} \quad ; \quad (x; y) \in E \times F \iff (x \in E \text{ et } y \in F).$$

On note $E^2 = E \times E$. Deux couples sont égaux si et seulement si $(x; y) = (x'; y') \iff (x = x' \text{ et } y = y')$; en général $(x; y) \neq (y; x)$.

Remarque

- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s'identifie au plan muni d'un repère : le point $M(x; y)$ correspond au couple $(x; y)$.
- Si E a n éléments et F en a p , alors $E \times F$ a np éléments.
- Le produit cartésien se représente par un **diagramme cartésien** (quadrillage).

Exemple 10

Soient $E = \{1; 2; 3\}$ et $F = \{a; b\}$. Déterminer $E \times F$ et F^2 , puis construire le diagramme cartésien de $E \times F$.

Solution

$$E \times F = \{(1; a); (1; b); (2; a); (2; b); (3; a); (3; b)\} \quad (3 \times 2 = 6 \text{ couples}); \quad F^2 = \{(a; a); (a; b); (b; a); (b; b)\}.$$

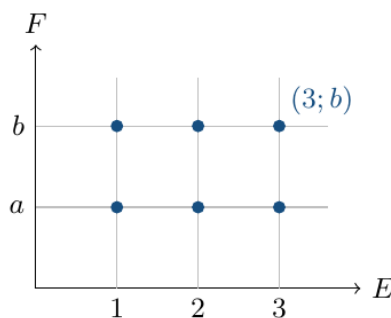


Diagramme cartésien de $E \times F$: chaque point du quadrillage représente un couple.

Exercice de révision (avec solution)

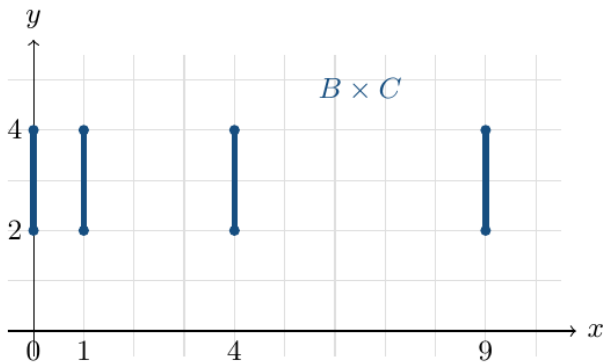
Exercice d'application

On considère $A = \{n \in \mathbb{N} / n^2 - 7n + 10 < 0\}$, $B = \left\{n \in \mathbb{N} / \frac{10}{n+1} \in \mathbb{N}\right\}$ et $C = \{x \in \mathbb{R} / |x - 3| \leq 1\}$.

- Déterminer A et B en extension.
- Déterminer $A \cup B$ et $A \cap B$ en extension.
- Montrer que $A \subset C$.
- Représenter $B \times C$ dans un repère orthonormé.

Solution

- $n^2 - 7n + 10 = (n - 2)(n - 5) < 0 \iff 2 < n < 5$, donc $A = \{3; 4\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n + 1 \in \mathbb{N}^*$ et $\frac{10}{n+1} \in \mathbb{N} \iff n + 1$ divise 10 $\iff n + 1 \in \{1; 2; 5; 10\}$, donc $B = \{0; 1; 4; 9\}$.
- $A \cup B = \{0; 1; 3; 4; 9\}$ et $A \cap B = \{4\}$.
- $|x - 3| \leq 1 \iff 2 \leq x \leq 4$, donc $C = [2; 4]$. Comme $3 \in [2; 4]$ et $4 \in [2; 4]$, $A \subset C$.
- $B \times C = \{(x; y) / x \in \{0; 1; 4; 9\} \text{ et } 2 \leq y \leq 4\}$: quatre segments verticaux.



Résumé : dictionnaire logique — ensembles

Logique	Ensembles	Définition
$P(x)$	$A = \{x \in E / P(x)\}$	$x \in A \iff P(x)$
$\overline{P(x)}$	$\overline{A}$	$x \in \overline{A} \iff x \notin A$
$P(x)$ et $Q(x)$	$A \cap B$	$x \in A$ et $x \in B$
$P(x)$ ou $Q(x)$	$A \cup B$	$x \in A$ ou $x \in B$
$P(x)$ et $\overline{Q(x)}$	$A \setminus B$	$x \in A$ et $x \notin B$
$(\forall x) P(x) \Rightarrow Q(x)$	$A \subset B$	tout élément de A est dans B
$(\forall x) P(x) \Leftrightarrow Q(x)$	$A = B$	$A \subset B$ et $B \subset A$
Lois de Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	