

Cours — Chapitre 01

Notions de logique

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Propositions, fonctions propositionnelles et quantificateurs — II. Négation d’une proposition — III. Opérations sur deux propositions — IV. Lois logiques — V. Raisonnements mathématiques (contre-exemple, direct, contraposée, équivalence, disjonction des cas, absurde, récurrence).

Notations. La négation d’une proposition P est notée $\overline{P}$ (lire « non P »). V signifie « vrai » et F « faux ». $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ désignent les ensembles usuels de nombres ; $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

I. Propositions, fonctions propositionnelles et quantificateurs

1. Proposition

Définition 1 : Proposition

On appelle **proposition** (ou assertion) tout énoncé mathématique qui a un sens et qui est **soit vrai, soit faux**, jamais les deux à la fois.

Remarque

1. La **valeur de vérité** d’une proposition vraie est notée V (ou 1) ; celle d’une proposition fausse est notée F (ou 0).

2. On note les propositions par des lettres majuscules : P , Q , R , ...

3. Le **tableau de vérité** d’une proposition P donne ses deux valeurs possibles :

P
V
F

Exemple 1

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

— P_1 : « $\sqrt{36} + \sqrt{64} = \sqrt{100}$ ».

— P_2 : « -3 est un entier naturel ».

— P_3 : « $\frac{7}{4}$ est un nombre décimal ».

— P_4 : « Tout losange est un parallélogramme ».

— P_5 : « 91 est un nombre premier ».

Solution

— $\sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14$ et $\sqrt{100} = 10$; or $14 \neq 10$, donc P_1 est **fausse**.

— $-3 < 0$, donc $-3 \notin \mathbb{N}$: P_2 est **fausse**.

— $\frac{7}{4} = 1,75 = \frac{175}{10^2}$, donc $\frac{7}{4} \in \mathbb{D}$: P_3 est **vraie**.

— Un losange a ses côtés opposés parallèles : P_4 est **vraie**.

— $91 = 7 \times 13$: P_5 est **fausse**.

2. Fonction propositionnelle

Définition 2 : Fonction propositionnelle

On appelle **fonction propositionnelle** tout énoncé contenant une ou plusieurs **variables**, chacune appartenant à un ensemble donné, et qui devient une proposition dès qu’on remplace chaque variable par un élément de son ensemble.

Selon le nombre de variables, on la note $P(x)$, $Q(x; y)$, $R(x; y; z)$, ...

Exemple 2

Préciser si chacun des énoncés suivants est une proposition ou une fonction propositionnelle.

$P : \ll \pi < \frac{22}{7} \gg$; $Q : \ll (\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \in \mathbb{N} \gg$; $A(x) : \ll x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 2x \gg$;

$R : \ll \sqrt{3} \in \mathbb{Q} \gg$; $C(n) : \ll n \in \mathbb{N}, n^2 + n + 41 \text{ est premier} \gg$; $D(n; m) : \ll (n; m) \in \mathbb{N}^2, n + 2m = 7 \gg$.

Solution

- P , Q et R ne contiennent aucune variable : ce sont des **propositions** (P est vraie car $\pi \approx 3,1416 < 3,1428 \approx \frac{22}{7}$; Q est vraie car $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = 5 - 2 = 3$; R est fausse).
- $A(x)$, $C(n)$ et $D(n; m)$ contiennent des variables : ce sont des **fonctions propositionnelles**. Par exemple, $A(3) : \ll 9 \geq 6 \gg$ est vraie et $A(1) : \ll 1 \geq 2 \gg$ est fausse; $D(1; 3) : \ll 1 + 6 = 7 \gg$ est vraie.

3. Les quantificateurs**Exemple 3 (activité)**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 - 2x - 8 < 0$.
2. En déduire la valeur de vérité de : $P_1 : \ll \text{Pour tout } x \text{ de }]-1; 3[, \text{ on a } x^2 - 2x - 8 < 0 \gg$; $P_2 : \ll \text{Il existe au moins un réel } x \text{ tel que } x^2 - 2x - 8 < 0 \gg$; $P_3 : \ll \text{Pour tout réel } x, x^2 - 2x - 8 < 0 \gg$; $P_4 : \ll \text{Il existe un unique réel } x \text{ tel que } x^2 - 2x - 8 = 0 \gg$.

Solution

1. Pour tout $x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$. Ce produit est strictement négatif si et seulement si ses facteurs sont de signes contraires, c'est-à-dire $-2 < x < 4$. Donc $S =]-2; 4[$.
2. $] - 1; 3[\subset] - 2; 4[$, donc P_1 est **vraie**. $0 \in] - 2; 4[$, donc P_2 est **vraie**. Pour $x = 5 : 25 - 10 - 8 = 7 \geq 0$, donc P_3 est **fausse**. L'équation $(x - 4)(x + 2) = 0$ admet deux solutions -2 et 4 , donc P_4 est **fausse**.

Définition 3 : Quantificateurs

1. Le **quantificateur universel**, noté $\forall$, se lit « pour tout » ou « quel que soit ».
2. Le **quantificateur existentiel**, noté $\exists$, se lit « il existe au moins un ».
3. Le symbole $\exists!$ se lit « il existe un unique ».
4. Lorsque **toutes** les variables d'une fonction propositionnelle sont liées par des quantificateurs, on obtient une **proposition**.

Exemple 4

Lire puis donner la valeur de vérité de : $P : (\exists! x \in \mathbb{R}) x^3 = 8$; $Q : (\forall x \in \mathbb{R}) x^2 - 4x + 5 > 0$; $R : (\exists x \in \mathbb{R}) x^2 + 2x + 3 = 0$; $S : (\forall x \in \mathbb{R}) 1 \leq x \leq 2$.

Solution

- $P : \ll \text{il existe un unique réel dont le cube vaut } 8 \gg$: **vraie** ($x = 2$ est le seul, car pour $x < 2, x^3 < 8$ et pour $x > 2, x^3 > 8$).
- $Q : \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \geq 1 > 0$: **vraie**.
- $R : x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 \geq 2 > 0$, l'équation n'a pas de solution réelle : **fausse**.
- $S : \text{pour } x = 0, 1 \leq 0 \text{ est faux} : \text{fausse}$.

Exemple 5

Écrire à l'aide des quantificateurs, puis donner la valeur de vérité :

- $P : \ll \text{L'équation } x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ admet au moins une solution réelle.} \gg$
- $Q : \ll \text{Le carré de tout entier relatif est un entier naturel.} \gg$
- $R : \ll \text{Certains réels ne sont pas des décimaux.} \gg$
- $S : \ll \text{L'équation } 3x - 2 = 0 \text{ admet une unique solution réelle.} \gg$
- $T : \ll \text{Pour tous entiers naturels } n \text{ et } m, \text{ on a } n = m + 1. \gg$
- $U : \ll \text{Pour tout réel } x, \text{ il existe un réel } y \text{ tel que } y < x. \gg$

— $V : \ll \text{Il existe un réel } y \text{ tel que, pour tout réel } x, y < x. \gg$

Solution

- $P : (\exists x \in \mathbb{R}) x^2 - 5x + 6 = 0 : \text{vraie } (x = 2).$
- $Q : (\forall n \in \mathbb{Z}) n^2 \in \mathbb{N} : \text{vraie}.$
- $R : (\exists x \in \mathbb{R}) x \notin \mathbb{D} : \text{vraie } (\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}).$
- $S : (\exists! x \in \mathbb{R}) 3x - 2 = 0 : \text{vraie } (3x - 2 = 0 \iff x = \frac{2}{3}).$
- $T : (\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}) n = m + 1 : \text{fausse } (n = m = 0).$
- $U : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) y < x : \text{vraie } (\text{on prend } y = x - 1, \text{ qui dépend de } x).$
- $V : (\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) y < x : \text{fausse } (\text{pour } x = y, \text{ on aurait } y < y).$

Remarque

1. On peut **permuter** deux quantificateurs consécutifs **de même nature** : $(\forall x)(\forall y) \iff (\forall y)(\forall x)$ et $(\exists x)(\exists y) \iff (\exists y)(\exists x).$
2. En général, on **ne peut pas** permuter deux quantificateurs de natures différentes sans changer le sens (comparer U et V ci-dessus).
3. Dans $(\exists x \in E)(\forall y \in F) P(x; y)$, le même x convient pour **tous** les y : x ne dépend pas de y . Dans $(\forall y \in F)(\exists x \in E) P(x; y)$, x est choisi **après** y et peut en dépendre. *Illustration* : « chaque élève de la classe a une place assise » ne signifie pas « il existe une place sur laquelle sont assis tous les élèves ».
4. On admet (et on démontrera au paragraphe V) que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
5. Tout rationnel s'écrit sous forme irréductible : $x \in \mathbb{Q} \iff (\exists(a; b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*) \left(x = \frac{a}{b} \text{ et } \text{PGCD}(a; b) = 1 \right).$

Exemple 6

Valeur de vérité de : $P_1 : (\exists! x \in \mathbb{R}) x^2 = 9$; $P_2 : (\forall x \in \mathbb{R}) x^2 - x + 1 > 0$; $P_3 : (\exists n \in \mathbb{N}) 2n + 1 = 0$; $P_4 : (\forall x \in \mathbb{R}) \sqrt{x^2} = x$; $P_5 : (\exists n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) n - m = 5$; $P_6 : (\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}) n - m = 5$; $P_7 : (\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) n + m = 5$; $P_8 : (\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}) n \leq m.$

Solution

P_1 fausse (3 et -3); P_2 vraie ($x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$); P_3 fausse ($2n + 1 \geq 1$); P_4 fausse ($\sqrt{(-2)^2} = 2 \neq -2$); P_5 vraie ($n = 5, m = 0$); P_6 fausse ($n = m = 0$); P_7 fausse (pour $n = 6, m = -1 \notin \mathbb{N}$); P_8 vraie ($n = 0$ convient pour tout $m \in \mathbb{N}$).

Application 1

Écrire à l'aide de quantificateurs : (a) « Tout réel positif est le carré d'un réel »; (b) « Il existe un entier naturel pair et premier »; (c) « Le produit de deux réels non nuls est non nul ».

Solution

- (a) $(\forall x \in \mathbb{R}_+)(\exists y \in \mathbb{R}) x = y^2$ (vraie : $y = \sqrt{x}$). (b) $(\exists n \in \mathbb{N}) (n \text{ pair et } n \text{ premier})$ (vraie : $n = 2$). (c) $(\forall(a; b) \in (\mathbb{R}^*)^2) ab \neq 0$ (vraie).

II. Négation d'une proposition

Définition 4 : Négation

La **négation** d'une proposition P est la proposition notée $\overline{P}$, qui est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Propriété**Négation des symboles usuels :**

Symbole	$\forall$	$\exists$	$=$	$\in$	$\leq$	$\geq$	$<$	$>$	et	ou
Négation	$\exists$	$\forall$	$\neq$	$\notin$	$>$	$<$	$\geq$	$\leq$	ou	et

Négation d'une proposition quantifiée. Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle, x appartenant à un ensemble non vide E :

$$\overline{(\forall x \in E) P(x)} \text{ est } (\exists x \in E) \overline{P(x)} \quad \text{et} \quad \overline{(\exists x \in E) P(x)} \text{ est } (\forall x \in E) \overline{P(x)}.$$

L'ensemble E **ne change pas** ; seuls le quantificateur et la propriété sont niés.

Exemple 7

Écrire la négation et donner la valeur de vérité : $P_1 : \sqrt{9+16} = 7$; $P_2 : \pi < 3,15$; $P_3 : \sqrt{7} \in [2;3]$; $P_4 : (\exists x \in \mathbb{R}) x^2 = 49$; $P_5 : (\forall x \in \mathbb{R}) x^3 \geq x$.

Solution

- $\overline{P_1} : \sqrt{9+16} \neq 7$; vraie car $\sqrt{25} = 5$. Donc P_1 est fausse.
- $\overline{P_2} : \pi \geq 3,15$; P_2 est vraie ($\pi \approx 3,1416$), donc $\overline{P_2}$ est fausse.
- $\overline{P_3} : \sqrt{7} \notin [2;3]$; comme $4 \leq 7 \leq 9$, $2 \leq \sqrt{7} \leq 3$: P_3 vraie.
- $\overline{P_4} : (\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \neq 49$; P_4 est vraie ($x = 7$), $\overline{P_4}$ fausse.
- $\overline{P_5} : (\exists x \in \mathbb{R}) x^3 < x$; pour $x = \frac{1}{2} : \frac{1}{8} < \frac{1}{2}$, donc $\overline{P_5}$ est vraie et P_5 est fausse.

Exemple 8

Valeur de vérité et négation de : $P_1 : (\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) m = 3n$; $P_2 : (\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) n = 3m$; $P_3 : (\forall x \in \mathbb{R}_+)(\exists y \in \mathbb{R}_+) y^2 = x$; $P_4 : (\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}) m \geq n$.

Solution

- $\overline{P_1} : (\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}) m \neq 3n$. P_1 est vraie : pour $n \in \mathbb{N}$, $m = 3n \in \mathbb{N}$ convient.
- $\overline{P_2} : (\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}) n \neq 3m$. Pour $n = 1 : 3m = 1 \iff m = \frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$, donc $\overline{P_2}$ est vraie et P_2 fausse.
- $\overline{P_3} : (\exists x \in \mathbb{R}_+)(\forall y \in \mathbb{R}_+) y^2 \neq x$. P_3 est vraie ($y = \sqrt{x}$).
- $\overline{P_4} : (\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) m < n$. P_4 est vraie ($n = 0$) ; d'ailleurs $\overline{P_4}$ est fausse pour $n = 0$.

Application 2

Écrire la négation de : A : « Tous les élèves de la classe ont la moyenne » ; $B : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N}) n > x$; $C : (\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) n \leq M$. Préciser la valeur de vérité de B et C .

Solution

$\overline{A}$: « Au moins un élève de la classe n'a pas la moyenne ». $\overline{B} : (\exists x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) n \leq x$; B est vraie (tout réel est strictement inférieur à au moins un entier naturel : propriété admise, dite d'Archimède). $\overline{C} : (\forall M \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N}) n > M$; c'est exactement B (à la lettre près), donc $\overline{C}$ est vraie et C est fausse.

III. Opérations sur deux propositions**Définition 5 : Connecteurs logiques**

Soient P et Q deux propositions.

1. La **conjonction** « P et Q » (notée aussi $P \wedge Q$) est vraie si et seulement si P et Q sont **toutes deux** vraies.
2. La **disjonction** « P ou Q » (notée aussi $P \vee Q$) est vraie si et seulement si **au moins l'une** des deux est vraie (« ou » inclusif).
3. L'**implication** $P \implies Q$ est la proposition « $\overline{P}$ ou Q ». Elle est fausse **uniquement** lorsque P est vraie et

Q fausse.

4. L'équivalence $P \iff Q$ est vraie si et seulement si P et Q ont la **même** valeur de vérité.

P	Q	P et Q	P ou Q	$P \implies Q$	$P \iff Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Exemple 9

Déterminer la valeur de vérité de : (1) « $3 < 8$ et $12 = 6$ » ; (2) « $3 < 8$ ou $12 = 6$ » ; (3) « $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \implies 2 > 5$ » ; (4) « $2 = 3 \implies 5 = 7$ » ; (5) « 7 est premier $\implies (\forall x \in \mathbb{R}) x^2 + 1 > 0$ » ; (6) « $|-6| = 6 \iff 2 \geq 9$ » ; (7) « $(\sqrt{5})^2 + 4 = 9 \iff 18 = 2 \times 3^2$ ».

Solution

(1) F (car « $12 = 6$ » est fausse) ; (2) V ; (3) V (la prémisse est fausse) ; (4) V (F $\implies$ F est vraie) ; (5) V (V $\implies$ V) ; (6) F (V et F) ; (7) V (les deux sont vraies : $5 + 4 = 9$ et $2 \times 9 = 18$).

Remarque

- $P \implies Q$ se lit : « P implique Q », « si P alors Q », « P est une **condition suffisante** pour Q », « Q est une **condition nécessaire** pour P ».
- $P \implies Q$ et $Q \implies P$ n'ont pas la même table (ligne 2 et ligne 3) : l'implication **n'est pas commutative**.
- $Q \implies P$ s'appelle l'**implication réciproque** de $P \implies Q$.
- $P \iff Q$ se lit « P équivaut à Q », « P si et seulement si Q » ; elle signifie « $P \implies Q$ et $Q \implies P$ ». L'équivalence est commutative.

Exemple 10

Valeur de vérité de : (1) « $(\exists x \in \mathbb{R}) x - 3 = 0$ et $(\exists x \in \mathbb{R}) x + 5 = 0$ » ; (2) « $(\exists x \in \mathbb{R}) (x - 3 = 0$ et $x + 5 = 0)$ » ; (3) « $(\forall x \in \mathbb{R}) x \geq 1$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}) x < 1$ » ; (4) « $(\forall x \in \mathbb{R}) (x \geq 1$ ou $x < 1)$ ».

Solution

(1) V ($x = 3$ pour la première, $x = -5$ pour la seconde). (2) F (un même réel ne peut valoir 3 et -5). (3) V (les deux propositions sont fausses : $x = 0$, puis $x = 2$). (4) V (tout réel vérifie l'une des deux inégalités).

Remarque

- Deux propositions sont dites **équivalentes** si elles ont la même valeur de vérité.
- « et » et « ou » sont **commutatifs** et **associatifs** : $(P \text{ et } Q) \iff (Q \text{ et } P)$, $[(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R] \iff [P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)]$, etc.
- Pour deux fonctions propositionnelles $P(x)$ et $Q(x)$ sur E non vide :
 - $(\forall x \in E) (P(x) \text{ et } Q(x)) \iff [(\forall x \in E) P(x)] \text{ et } [(\forall x \in E) Q(x)]$;
 - $(\exists x \in E) (P(x) \text{ ou } Q(x)) \iff [(\exists x \in E) P(x)] \text{ ou } [(\exists x \in E) Q(x)]$;
 - mais « $\forall$ / ou » et « $\exists$ / et » ne se distribuent **pas** en général (exemple 10).

IV. Lois logiques

Exemple 11 (activité)

Compléter le tableau de vérité de la proposition $(P \text{ et } Q) \implies P$.

Solution

P	Q	$P \text{ et } Q$	$(P \text{ et } Q) \implies P$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

La proposition est vraie dans **tous** les cas.

Définition 6 : Loi logique

Une **loi logique** (ou tautologie) est une proposition composée à l'aide de connecteurs logiques qui est **vraie quelles que soient** les valeurs de vérité des propositions qui la composent.

Méthode

Pour montrer qu'une proposition est une loi logique, il suffit de dresser son **tableau de vérité** et de constater que sa dernière colonne ne contient que des V. On peut aussi utiliser des lois logiques déjà établies.

Exemple 12

Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques : (1) $(P \text{ et } \overline{P}) \implies Q$; (2) $[P \text{ et } (Q \text{ ou } R)] \iff [(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)]$.

Solution

(1) « $P \text{ et } \overline{P}$ » est toujours fausse (si P est V, $\overline{P}$ est F et inversement), donc l'implication « $F \implies Q$ » est toujours vraie : c'est une loi logique.

(2) Notons L le membre de gauche et M celui de droite :

P	Q	R	$Q \text{ ou } R$	L	$P \text{ et } Q$	$P \text{ et } R$	M	$L \iff M$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

Les colonnes L et M sont identiques, donc $L \iff M$ est toujours vraie : c'est une loi logique.

Propriété : négation des connecteurs

Quelles que soient les propositions P et Q , les propositions suivantes sont des lois logiques :

- **Lois de Morgan** : $\overline{P \text{ et } Q} \iff (\overline{P} \text{ ou } \overline{Q})$ et $\overline{P \text{ ou } Q} \iff (\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$.
- **Négation de l'implication** : $\overline{P \implies Q} \iff (P \text{ et } \overline{Q})$.
- **Négation de l'équivalence** : $\overline{P \iff Q} \iff (\overline{P} \iff Q) \iff (P \iff \overline{Q}) \iff [(P \text{ et } \overline{Q}) \text{ ou } (\overline{P} \text{ et } Q)]$.

Solution

Justification de la négation de l'implication. Par définition $P \implies Q$ est « $\overline{P} \text{ ou } Q$ » ; d'après Morgan, sa négation est « $\overline{\overline{P} \text{ ou } Q}$ », c'est-à-dire « $P \text{ et } \overline{Q}$ » (car $\overline{\overline{P}} \iff P$).

Exemple 13

Soient $a, b, c, x \in \mathbb{R}$. Écrire la négation de :

$P : \langle x \geq 3 \implies x < 7 \rangle$;

$Q : \langle a = b \text{ ou } a = c \rangle$;

$R : \langle x \in \mathbb{Z} \iff x^2 \in \mathbb{Z} \rangle$;

$S : \langle a \leq b \text{ et } b \leq c \rangle$.

Solution

$\bar{P} : \langle x \geq 3 \text{ et } x \geq 7 \rangle$; $\bar{Q} : \langle a \neq b \text{ et } a \neq c \rangle$; $\bar{R} : \langle (x \in \mathbb{Z} \text{ et } x^2 \notin \mathbb{Z}) \text{ ou } (x \notin \mathbb{Z} \text{ et } x^2 \in \mathbb{Z}) \rangle$; $\bar{S} : \langle a > b \text{ ou } b > c \rangle$.

Remarque : négation de $\exists$!

$(\exists! x \in E) P(x)$ signifie : $[(\exists x \in E) P(x)]$ et $[(\forall (x; y) \in E^2) (P(x) \text{ et } P(y)) \implies x = y]$. Sa négation est donc :

$$[(\forall x \in E) \bar{P}(x)] \text{ ou } [(\exists (x; y) \in E^2) P(x) \text{ et } P(y) \text{ et } x \neq y]$$

(« aucun élément ne convient, ou au moins deux éléments distincts conviennent »).

Propriété : lois logiques usuelles

Pour toutes propositions P, Q, R :

- $\bar{\bar{P}} \iff P$; $(P \text{ ou } \bar{P})$ (tiers exclu) ; $(P \implies Q) \iff (\bar{P} \text{ ou } Q)$; $(P \iff Q) \iff [(P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P)]$; $(P \iff Q) \iff (\bar{P} \iff \bar{Q})$.
- Commutativité** : $(P \text{ et } Q) \iff (Q \text{ et } P)$; $(P \text{ ou } Q) \iff (Q \text{ ou } P)$; $(P \iff Q) \iff (Q \iff P)$.
- Associativité** : $[(P \text{ et } Q) \text{ et } R] \iff [P \text{ et } (Q \text{ et } R)]$; $[(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R] \iff [P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)]$.
- Distributivité** : $[P \text{ et } (Q \text{ ou } R)] \iff [(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)]$; $[P \text{ ou } (Q \text{ et } R)] \iff [(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)]$.
- Transitivité** : $[(P \implies Q) \text{ et } (Q \implies R)] \implies (P \implies R)$.

Application 3

- Montrer, par un tableau de vérité, que $[(P \implies Q) \text{ et } (Q \implies R)] \implies (P \implies R)$ est une loi logique.
- Sans tableau, montrer que $(P \implies Q) \iff (\bar{Q} \implies \bar{P})$ est une loi logique.

Solution

- Notons $T : \langle (P \implies Q) \text{ et } (Q \implies R) \rangle$.

P	Q	R	$P \implies Q$	$Q \implies R$	T	$P \implies R$	$T \implies (P \implies R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

La dernière colonne ne contient que des V : c'est une loi logique.

- $(\bar{Q} \implies \bar{P}) \iff (\bar{\bar{Q}} \text{ ou } \bar{P}) \iff (Q \text{ ou } \bar{P}) \iff (\bar{P} \text{ ou } Q) \iff (P \implies Q)$, en utilisant successivement la définition de l'implication, $\bar{\bar{Q}} \iff Q$, la commutativité de « ou » et de nouveau la définition. Chaque étape étant une loi logique, l'équivalence est une loi logique.

V. Raisonnements mathématiques

Chaque type de raisonnement repose sur une **loi logique** : c'est elle qui garantit que la démonstration est correcte.

1. Raisonnement par contre-exemple

Loi logique (contre-exemple)

$$\overline{(\forall x \in E) P(x)} \iff (\exists x \in E) \overline{P(x)}$$

Pour montrer qu'une proposition de la forme $(\forall x \in E) P(x)$ est **fausse**, il suffit d'exhiber **un** élément $x_0 \in E$ tel que $P(x_0)$ soit fausse. x_0 s'appelle un **contre-exemple**.

Exemple 14

Montrer que les propositions suivantes sont fausses : (1) $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 - 3x + 2 = 0$; (2) $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) 2x - y = 1$; (3) $(\forall n \in \mathbb{N}) n^2 + n + 11$ est premier ; (4) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \frac{2xy}{1+y^2} > 1$.

Solution

(1) Pour $x = 0$: $0 - 0 + 2 = 2 \neq 0$. (2) Pour $(x; y) = (0; 0)$: $0 \neq 1$. (3) Pour $n = 10$: $100 + 10 + 11 = 121 = 11^2$, qui n'est pas premier. (4) La négation est $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \frac{2xy}{1+y^2} \leq 1$; pour $x = 0$, $\frac{0}{1+y^2} = 0 \leq 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$: la négation est vraie, donc la proposition est fausse.

Application 4

Montrer que les propositions suivantes sont fausses : $A : (\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2) \sqrt{a^2 + b^2} = a + b$; $B : (\forall x \in \mathbb{R}) |x - 1| = x - 1$.

Solution

A : pour $(a; b) = (1; 1)$, $\sqrt{2} \neq 2$. B : pour $x = 0$, $|0 - 1| = 1 \neq -1$.

2. Raisonnement direct (déductif)

Loi logique (raisonnement direct)

$$[(P \implies R) \text{ et } (R \implies Q)] \implies (P \implies Q)$$

Pour démontrer $P \implies Q$, on **suppose** P **vraie** et, par une chaîne d'implications $P \implies R_1 \implies R_2 \implies \dots \implies Q$ justifiées par des propriétés connues, on établit que Q est vraie.

Exemple 15

- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) |x - 1| \leq 2 \implies |2x + 3| \leq 9$.
- Montrer que $(\forall (a; b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2) \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Solution

- Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - 1| \leq 2$. Alors $-2 \leq x - 1 \leq 2$, donc $-1 \leq x \leq 3$, donc $-2 \leq 2x \leq 6$, donc $1 \leq 2x + 3 \leq 9$. Ainsi $-9 \leq 2x + 3 \leq 9$, c'est-à-dire $|2x + 3| \leq 9$.
- Soient $a > 0$ et $b > 0$. On a $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a - b)^2}{ab}$. Or $(a - b)^2 \geq 0$ et $ab > 0$, donc $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \geq 0$.

Application 5

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) x \geq 2 \implies x^2 - x - 2 \geq 0$.

Solution

Soit $x \geq 2$. On a $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$; or $x - 2 \geq 0$ et $x + 1 \geq 3 > 0$, donc le produit est positif : $x^2 - x - 2 \geq 0$.

3. Raisonnement par contraposée**Loi logique (contraposée)**

$$(P \implies Q) \iff (\overline{Q} \implies \overline{P})$$

Pour démontrer $P \implies Q$, on peut démontrer sa **contraposée** $\overline{Q} \implies \overline{P}$: c'est le raisonnement par contraposée. Il est particulièrement adapté lorsque P et Q contiennent le symbole $\neq$.

Exemple 16

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est impair, alors n est impair.
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $(x \neq y \text{ et } x + y \neq 3) \implies x^2 - 3x \neq y^2 - 3y$.
3. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Montrer que $x \neq 1 \implies \frac{2x}{x+1} \neq 1$.

Solution

1. Contraposée : « n pair $\implies n^2$ pair ». Si n est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$, donc $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ avec $2k^2 \in \mathbb{N}$: n^2 est pair.
2. Contraposée : $x^2 - 3x = y^2 - 3y \implies (x = y \text{ ou } x + y = 3)$. Supposons $x^2 - 3x = y^2 - 3y$. Alors $x^2 - y^2 - 3(x - y) = 0$, soit $(x - y)(x + y - 3) = 0$, donc $x - y = 0$ ou $x + y - 3 = 0$, c'est-à-dire $x = y$ ou $x + y = 3$.
3. Contraposée : $\frac{2x}{x+1} = 1 \implies x = 1$. Si $\frac{2x}{x+1} = 1$, comme $x + 1 \neq 0$, on a $2x = x + 1$, donc $x = 1$.

Remarque

Il ne faut pas confondre, pour l'implication $P \implies Q$:

Négation	Réciproque	Contraposée
$P \text{ et } \overline{Q}$	$Q \implies P$	$\overline{Q} \implies \overline{P}$

Seule la contraposée est équivalente à l'implication de départ. **Conséquence de l'exemple 16** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, n^2 pair $\implies n$ pair (contraposée de « n impair $\implies n^2$ impair »), donc n et n^2 ont la même parité.

Application 6

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $a \neq b \implies \frac{a}{1+a} \neq \frac{b}{1+b}$.

Solution

Contraposée : $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b} \implies a = b$. Si $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b}$, comme $1+a > 0$ et $1+b > 0$, on obtient $a(1+b) = b(1+a)$, soit $a + ab = b + ab$, donc $a = b$.

4. Raisonnement par équivalences successives**Loi logique (équivalences successives)**

$$[(P \iff R) \text{ et } (R \iff Q)] \implies (P \iff Q)$$

Pour démontrer $P \iff Q$, on écrit $P \iff R_1 \iff R_2 \iff \dots \iff Q$, **chaque** équivalence étant justifiée dans les **deux sens**. Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, il suffit de trouver une proposition Q **vraie** telle que $P \iff Q$.

Attention

On n'écrit $\Longleftrightarrow$ que si l'étape est **réversible**. Exemples : multiplier par un nombre **non nul**, ajouter un même nombre, passer à l'inverse de deux nombres de **même signe strict**, élever au carré deux nombres **positifs**. Sinon, on écrit $\Longrightarrow$.

Exemple 17

1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |x - 2| < \frac{1}{3} \Longleftrightarrow \frac{3}{10} < \frac{1}{x+1} < \frac{3}{8}$.
2. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+) \quad \sqrt{x+1} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

Solution

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $|x - 2| < \frac{1}{3} \Longleftrightarrow \frac{5}{3} < x < \frac{7}{3} \Longleftrightarrow \frac{8}{3} < x + 1 < \frac{10}{3}$. Les trois membres étant strictement positifs, le passage à l'inverse est réversible et renverse l'ordre : $\frac{8}{3} < x + 1 < \frac{10}{3} \Longleftrightarrow \frac{3}{10} < \frac{1}{x+1} < \frac{3}{8}$.
2. Soit $x \geq 0$. Les nombres $\sqrt{x+1}$ et $1 + \frac{x}{2}$ sont positifs, donc $\sqrt{x+1} \leq 1 + \frac{x}{2} \Longleftrightarrow x + 1 \leq (1 + \frac{x}{2})^2 \Longleftrightarrow x + 1 \leq 1 + x + \frac{x^2}{4} \Longleftrightarrow 0 \leq \frac{x^2}{4}$. La dernière proposition est vraie, donc la première l'est aussi.

Remarque : raisonnement par double implication

$$(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow [(P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow P)]$$

Pour démontrer $P \Longleftrightarrow Q$, on peut démontrer **séparément** $P \Longrightarrow Q$ puis $Q \Longrightarrow P$.

Exemple 18

1. Montrer que $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) \quad (x - 1)^2 + |y + 2| = 0 \Longleftrightarrow (x = 1 \text{ et } y = -2)$.
2. Montrer que pour tous $x \in [2; +\infty[$ et $y \in [1; +\infty[$: $x + y + 2 = 2\sqrt{x-2} + 4\sqrt{y-1} \Longleftrightarrow (x = 3 \text{ et } y = 5)$.

Solution

1. ($\Leftarrow$) Si $x = 1$ et $y = -2$: $0 + 0 = 0$. ($\Rightarrow$) Si $(x - 1)^2 + |y + 2| = 0$: comme $(x - 1)^2 \geq 0$ et $|y + 2| \geq 0$, on a $0 \leq (x - 1)^2 = -|y + 2| \leq 0$, donc $(x - 1)^2 = 0$, puis $|y + 2| = 0$; d'où $x = 1$ et $y = -2$.
2. Pour $x \geq 2$, $y \geq 1$: $(\sqrt{x-2} - 1)^2 + (\sqrt{y-1} - 2)^2 = (x - 1 - 2\sqrt{x-2}) + (y + 3 - 4\sqrt{y-1}) = x + y + 2 - 2\sqrt{x-2} - 4\sqrt{y-1}$. ($\Rightarrow$) Si $x + y + 2 = 2\sqrt{x-2} + 4\sqrt{y-1}$, la somme des deux carrés est nulle, donc chacun est nul : $\sqrt{x-2} = 1$ et $\sqrt{y-1} = 2$, d'où $x = 3$ et $y = 5$. ($\Leftarrow$) Pour $x = 3$, $y = 5$: $3 + 5 + 2 = 10$ et $2\sqrt{1} + 4\sqrt{4} = 10$.

Application 7

Montrer que $(\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2) \quad a^2 + b^2 = 2ab \Longleftrightarrow a = b$.

Solution

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. $a^2 + b^2 = 2ab \Longleftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0 \Longleftrightarrow (a - b)^2 = 0 \Longleftrightarrow a - b = 0 \Longleftrightarrow a = b$ (chaque étape est réversible : on ajoute $-2ab$, on factorise, et un carré est nul si et seulement si le nombre est nul).

5. Raisonnement par disjonction des cas**Loi logique (disjonction des cas)**

$$[(R \Longrightarrow P) \text{ et } (Q \Longrightarrow P)] \Longrightarrow [(R \text{ ou } Q) \Longrightarrow P]$$

Pour démontrer $(\forall x \in E) P(x)$, on partage E en cas qui couvrent **toutes** les valeurs possibles de x et on démontre $P(x)$ dans chaque cas. Méthode adaptée aux valeurs absolues, à la parité, aux signes.

Exemple 19

1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 + x + 1 \geq |x + 1|$.
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n(n + 3)$ est pair.

Solution

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. **Cas 1** : $x \geq -1$. Alors $|x+1| = x+1$ et $x^2 + x + 1 - (x+1) = x^2 \geq 0$. **Cas 2** : $x < -1$. Alors $|x+1| = -x-1$ et $x^2 + x + 1 - (-x-1) = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$. Dans les deux cas, $x^2 + x + 1 \geq |x+1|$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. **Cas 1** : n pair, $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) : $n(n+3) = 2k(2k+3)$ est pair. **Cas 2** : n impair, $n = 2k+1$: $n+3 = 2(k+2)$, donc $n(n+3) = 2(2k+1)(k+2)$ est pair.

Application 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x-3| = 2x$.

Solution

Cas 1 : $x \geq 3$. L'équation devient $x-3 = 2x$, soit $x = -3$, qui ne vérifie pas $x \geq 3$: pas de solution.
Cas 2 : $x < 3$. L'équation devient $3-x = 2x$, soit $x = 1$, qui vérifie $x < 3$. Donc $S = \{1\}$ (vérification : $|1-3| = 2 = 2 \times 1$).

6. Raisonnement par l'absurde**Loi logique (absurde)**

$$[(\overline{P} \implies Q) \text{ et } (\overline{P} \implies \overline{Q})] \implies P$$

Pour démontrer P , on **suppose** $\overline{P}$ vraie et on en déduit une **contradiction** (une proposition et sa négation).
Méthode adaptée aux énoncés « n'est pas », « n'appartient pas », « n'admet pas », « $\neq$ ».

Exemple 20

1. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\frac{n+2}{n+4} \neq 1$.
3. Soit $a > 0$ et ABC un triangle tel que $AB = 4a$, $BC = 5a$ et $CA = 7a$. Montrer que ABC n'est pas rectangle.

Solution

1. Supposons $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Comme $\sqrt{2} > 0$, on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $\text{PGCD}(a; b) = 1$. Alors $a^2 = 2b^2$, donc a^2 est pair, donc a est pair (remarque du §3) : $a = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Il vient $4k^2 = 2b^2$, soit $b^2 = 2k^2$: b^2 est pair, donc b est pair. Alors 2 divise a et b , ce qui contredit $\text{PGCD}(a; b) = 1$. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2. Supposons $\frac{n+2}{n+4} = 1$. Comme $n+4 \neq 0$, on obtient $n+2 = n+4$, soit $2 = 4$: contradiction. Donc $\frac{n+2}{n+4} \neq 1$.
3. Supposons ABC rectangle. Son hypoténuse serait le plus grand côté $[CA]$, et d'après Pythagore $CA^2 = AB^2 + BC^2$, soit $49a^2 = 16a^2 + 25a^2 = 41a^2$, donc $8a^2 = 0$ et $a = 0$, ce qui contredit $a > 0$. Donc ABC n'est pas rectangle.

Application 9

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$.

Solution

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons $\sqrt{n^2+1} = m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Alors $m^2 = n^2 + 1$, donc $n^2 < m^2$; comme $n, m \geq 0$, $n < m$, donc $m \geq n+1$ et $m^2 \geq n^2 + 2n + 1 > n^2 + 1$ (car $n \geq 1$). Contradiction avec $m^2 = n^2 + 1$. Donc $\sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$.

7. Raisonnement par récurrence

Loi logique : principe de récurrence

Soit $P(n)$ une fonction propositionnelle définie sur $\mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\left[P(n_0) \text{ et } (\forall n \geq n_0) (P(n) \implies P(n+1)) \right] \implies (\forall n \geq n_0) P(n).$$

Initialisation : on vérifie que $P(n_0)$ est vraie. **Hérédité** : on fixe un entier $n \geq n_0$, on suppose $P(n)$ vraie (hypothèse de récurrence) et on démontre $P(n+1)$. **Conclusion** : d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 21

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4) \quad 2^n \geq n^2$.
3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 7 \text{ divise } 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

Solution

1. Notons $P(n)$: « $1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$ ». *Initialisation* : pour $n = 1$, $1 = 1^2$. *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$. Alors $1 + 3 + \dots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$: $P(n+1)$ est vraie. *Conclusion* : $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. *Initialisation* : $2^4 = 16 = 4^2$. *Hérédité* : soit $n \geq 4$ tel que $2^n \geq n^2$. Alors $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n^2$. Or $2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 \geq 9 - 2 > 0$ car $n-1 \geq 3$. Donc $2^{n+1} \geq 2n^2 > (n+1)^2$. *Conclusion* : $(\forall n \geq 4) \quad 2^n \geq n^2$.
3. Posons $u_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$. *Initialisation* : $u_0 = 3 + 4 = 7$. *Hérédité* : supposons $u_n = 7k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} = 3^{2n+3} + 2^{n+3} = 9 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2} = 9u_n - 7 \cdot 2^{n+2} = 7(9k - 2^{n+2})$, avec $9k - 2^{n+2} \in \mathbb{Z}$; donc $7 \mid u_{n+1}$. *Conclusion* : $7 \mid u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : symboles $\sum$ et $\prod$

Pour écrire une somme ou un produit de façon compacte :

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{et} \quad a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n = \prod_{k=1}^n a_k.$$

Exemples : $1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k$; $1 \times 2 \times \dots \times n = \prod_{k=1}^n k$; $1 + 3 + \dots + (2n+1) = \sum_{k=0}^n (2k+1)$.

Règles : $\sum_{k=0}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) + a_{n+1}$; $\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k$; si α ne dépend pas de k , $\sum_{k=0}^n \alpha a_k = \alpha \sum_{k=0}^n a_k$ et $\sum_{k=1}^n \alpha = n\alpha$.

Application 10

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$.

Solution

Initialisation : pour $n = 0$, $\sum_{k=0}^0 2^k = 1 = 2^1 - 1$. *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$. Alors $\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$. *Conclusion* : la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Synthèse : quel raisonnement choisir ?

Objectif	Raisonnement conseillé	Loi logique
Montrer que $(\forall x \in E) P(x)$ est fausse	Contre-exemple	$\overline{(\forall x)P(x)} \iff (\exists x)\overline{P(x)}$
Montrer $P \implies Q$ (sans $\neq$)	Direct	$[(P \Rightarrow R) \text{ et } (R \Rightarrow Q)] \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$
Montrer $P \implies Q$ (avec $\neq$)	Contraposée	$(P \Rightarrow Q) \iff (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$
Montrer $P \iff Q$	Équivalences ou double implication	$(P \Leftrightarrow Q) \iff [(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)]$
Valeurs absolues, parité, signe	Disjonction des cas	$[(R \Rightarrow P) \text{ et } (Q \Rightarrow P)] \Rightarrow [(R \text{ ou } Q) \Rightarrow P]$
« n'est pas », « $\notin$ », « $\neq$ »	Absurde	$[(\overline{P} \Rightarrow Q) \text{ et } (\overline{P} \Rightarrow \overline{Q})] \Rightarrow P$
Montrer $(\forall n \geq n_0) P(n)$	Récurrence	Principe de récurrence