

Corrigé détaillé de la série — Chapitre 17

Produit scalaire dans l'espace

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — méthodes et corrections du livre

- Plan : vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ puis $ax + by + cz + d = 0$, d obtenu avec un point. Sphère : on **complète les carrés**. Position plan/sphère : on compare $d(\Omega; P)$ et R .
- **Erreur du livre (exercice 5)** : avec $B(1; -2; -1)$ et $C(-3; 1; 2)$, on trouve $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -3\vec{i} - 7\vec{j} + 3\vec{k}$ et ni B ni C ne vérifient $2x + 2y + z + 6 = 0$. Les points ont été remplacés par $B(1; -2; -4)$, $C(-3; 1; -2)$, qui rendent l'énoncé cohérent.
- **Doublon du livre** : l'exercice 8 reprenait les données de l'exercice 1 ; il a été réécrit avec d'autres données.
- Tous les résultats ont été contrôlés par calcul exact (Python/sympy, `build/verif_lot4.py`).

Exercice 1

1. $\overrightarrow{OA}(1; 1; 2)$, $\overrightarrow{OB}(0; 1; 1)$: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, donc non colinéaires : O , A , B non alignés.
2. Produit scalaire : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = 1 + 1 - 2 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 + 1 - 1 = 0$. Produit vectoriel : $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = (1 - 2; 0 - 1; 1 - 0) = (-1; -1; 1) = -\vec{n}$, vecteur orthogonal à $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ par définition.
3. $\vec{n}$ est normal à (OAB) et $O \in (OAB)$: (OAB) : $x + y - z = 0$. Autre méthode : $M \in (OAB) \iff \det(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = 0 \iff x + y - z = 0$ (même résultat).
4. Dirigée par $\vec{n}$: $x = 1 + t$, $y = 1 + t$, $z = 2 - t$ ($t \in \mathbb{R}$).

Exercice 2

1. a. $\overrightarrow{AB}(2; 2; -2)$; on prend $\vec{u}(1; 1; -1)$: $x = -1 + t$, $y = t$, $z = 1 - t$ ($t \in \mathbb{R}$).
1. b. $\vec{n}(1; 1; -1)$ normal à (P) et $\vec{u} = \vec{n}$: $(AB) \perp (P)$.
1. c. $(-1 + t) + t - (1 - t) = 0 \iff 3t = 2 \iff t = \frac{2}{3}$: point $(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3})$.
2. $\overrightarrow{AC}(2; -1; 1)$: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 - 1 - 1 = 0$, donc $(AC) \parallel (P)$; $A \notin (P)$ car $-1 + 0 - 1 = -2 \neq 0$: strictement parallèle.
3. (Q) : $x + y - z + d = 0$ avec $B \in (Q)$: $1 + 2 + 1 + d = 0 \iff d = -4$: (Q) : $x + y - z - 4 = 0$.

Exercice 3

1. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 1 + 4 + 9 - 11 = 3 > 0$: sphère de centre $\Omega(1; -2; -3)$, de rayon $R = \sqrt{3}$.
2. $d(\Omega; (P)) = \frac{|2+4-5|}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4} < \sqrt{3}$: cercle. $H = \Omega + \lambda(2; -2; 0) \in (P) \iff 8\lambda + 1 = 0 \iff \lambda = -\frac{1}{8}$: $H(\frac{3}{4}; -\frac{7}{4}; -3)$; $r = \sqrt{3 - \frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{46}}{4}$.
3. Plans $2x - 2y + d = 0$ avec $\frac{|6+d|}{\sqrt{8}} = \sqrt{3} \iff |6 + d| = 2\sqrt{6} \iff d = -6 \pm 2\sqrt{6}$: $x - y - 3 + \sqrt{6} = 0$ et $x - y - 3 - \sqrt{6} = 0$.
4. $d(\Omega; (Q)) = \frac{|1-2-3+1|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} = R$: tangent. Contact : $\Omega + \lambda(1; 1; 1) \in (Q) \iff 3\lambda - 3 = 0 \iff \lambda = 1$: point $(2; -1; -2)$.
5. a. $(2; -2; 0) \cdot (1; 1; 1) = 0$: $(P) \perp (Q)$.
5. b. Direction $(2; -2; 0) \wedge (1; 1; 1) = (-2; -2; 4)$, soit $(1; 1; -2)$; point avec $z = 0$: $(\frac{3}{4}; -\frac{7}{4}; 0)$. (Δ) : $x = \frac{3}{4} + t$, $y = -\frac{7}{4} + t$, $z = -2t$ ($t \in \mathbb{R}$).
6. a. $0 + 1 + 4 - 0 - 4 - 12 + 11 = 0$: $A \in (S)$.

6. b. Normal $\overrightarrow{\Omega A}(-1; 1; 1) : -x + (y + 1) + (z + 2) = 0$, soit $(Q') : x - y - z - 3 = 0$.

Exercice 4

1. $(S) : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 3$, soit $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0$.

2. On utilise $d(\Omega; D(A; \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{A\Omega} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

- $(D_1) : A_1(2; 2; 5), \vec{u}_1(0; 4; 4) : d = \sqrt{3} = R$: **tangente**; le point de contact correspond à $t = -1 : (2; -2; 1)$.
- $(D_2) : A_2(2; -2; 1), \vec{u}_2(-1; 1; -1) : d = 0 < R$ ((D_2) passe par Ω , pour $t = 1$) : **deux points**, $t = 0$ et $t = 2 : (2; -2; 1)$ et $(0; 0; -1)$.
- $(D_3) : A_3(-2; 0; 0), \vec{u}_3(6; 4; 1) : d = \sqrt{\frac{334}{53}} \approx 2,51 > \sqrt{3} : \text{aucun point commun.}$

Exercice 5

1. a. $\overrightarrow{AB}(1; 0; -2), \overrightarrow{AC}(-3; 3; 0) : \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (0 + 6; 6 - 0; 3 - 0) = (6; 6; 3)$.

1. b. Non nul, donc A, B, C non alignés et $(2; 2; 1)$ est normal à $(ABC) : 2x + 2y + z + d = 0$, A donne $-4 - 2 + d = 0$, $d = 6$.

2. $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 23 + 1 + 1 = 25 : \Omega(1; 0; 1), R = 5$.

3. a. $t = 0$ donne Ω , et le vecteur directeur $(2; 2; 1)$ est normal à (ABC) .

3. b. $2(1 + 2t) + 4t + (1 + t) + 6 = 0 \iff 9t + 9 = 0 \iff t = -1 : H(-1; -2; 0)$.

4. $d = \frac{|2+0+1+6|}{3} = 3 < 5$: cercle de centre $H(-1; -2; 0)$ et de rayon $\sqrt{25 - 9} = 4$.

Exercice 6

1. a. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1 + 3 = 4 : \Omega(1; 1; 1), R = 2$.

1. b. $d(\Omega; (P)) = \frac{|1-1|}{\sqrt{2}} = 0 < 2 : (P)$ passe par Ω ; intersection : un cercle.

1. c. (C) est un grand cercle : centre $\Omega(1; 1; 1)$, rayon 2.

2. a. $\vec{u}(0; 1; -1)$ est un vecteur normal de (P) : il dirige (D) .

2. b. $\overrightarrow{\Omega A}(0; -3; 1) : \overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = ((-3)(-1) - 1 \cdot 1; 1 \cdot 0 - 0 \cdot (-1); 0 \cdot 1 - (-3) \cdot 0) = (2; 0; 0)$. Donc $d(\Omega; (D)) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < 2$: deux points d'intersection.

2. c. $M(1; -2 + t; 2 - t) \in (S) \iff (t - 3)^2 + (1 - t)^2 = 4 \iff 2t^2 - 8t + 6 = 0 \iff t \in \{1; 3\} : (1; -1; 1)$ et $(1; 1; -1)$.

Exercice 7

1. a. $\overrightarrow{AB}(2; -8; -2), \overrightarrow{AC}(3; 0; 1) : \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-8; -8; 24)$.

1. b. Normal $(1; 1; -3) : x + y - 3z + d = 0$; $A : -1 + 2 - 3 + d = 0$, $d = 2 : (ABC) : x + y - 3z + 2 = 0$.

2. a. (Q') a pour équation $y = 0$, normal $(0; 1; 0)$, non colinéaire à $(1; 1; -3)$: sécants. On remarque que $(Q) = (ABC)$.

2. b. $y = 0$ et $x = 3z - 2 : (\Delta) : x = -2 + 3t, y = 0, z = t (t \in \mathbb{R})$.

3. $(S) : x^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 4$.

4. $(JK) : x = -2 + 3t, y = 0, z = t$ (c'est (Δ) !). $(3t - 2)^2 + 1 + (t + 1)^2 = 4 \iff 10t^2 - 10t + 2 = 0 \iff t = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{10}$.
Deux points : $\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{3\sqrt{5}}{10}; 0; \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{10}\right)$ (signes correspondants).

Exercice 8

1. $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = (2; 1; 1) \wedge (1; 0; 1) = (1; -1; -1) \neq \vec{0}$: non alignés.

2. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = 2 - 1 - 1 = 0, \vec{n} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 - 0 - 1 = 0$.

3. $(OAB) : x - y - z = 0$.

4. a. $(\Delta) : x = 2 + t, y = 1 + t, z = 1 + t \ (t \in \mathbb{R})$.

4. b. $d(M; (P)) = \frac{|4+3t|}{\sqrt{3}} = 1 \iff 4 + 3t = \pm\sqrt{3} \iff t = \frac{-4 \pm \sqrt{3}}{3} : M\left(\frac{2 \pm \sqrt{3}}{3}; \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{3}; \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{3}\right)$ (signes correspondants).

5. a. Milieu $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$, normal $\overrightarrow{AB}(-1; -1; 0) : (Q) : x + y - 2 = 0$.

5. b. $(1; 1; 0)$ et $(1; 1; 1)$ non colinéaires : sécants.

Exercice 9

1. $\overrightarrow{AB}(0; -2; 1), \overrightarrow{AC}(-1; 0; 1) : \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-2; -1; -2) \neq \vec{0} : \text{non alignés.}$

2. Normal $(2; 1; 2)$ et $A : 2 + 1 + 0 + d = 0, d = -3$.

3. $(1; 2; -2) \cdot (2; 1; 2) = 2 + 2 - 4 = 0 : (P) \perp (ABC)$.

4. Direction $(1; 2; -2) \wedge (2; 1; 2) = (6; -6; -3)$, soit $(-2; 2; 1)$; point $z = 0 : x + 2y = -1, 2x + y = 3$, d'où $\left(\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; 0\right)$. $(D) : x = \frac{7}{3} - 2t, y = -\frac{5}{3} + 2t, z = t \ (t \in \mathbb{R})$.

5. IM minimale $\iff \overrightarrow{IM} \perp \vec{u} : \left(\frac{1}{3} - 2t\right)(-2) + \left(-\frac{8}{3} + 2t\right)2 + (t - 1) = 0 \iff 9t - 7 = 0 \iff t = \frac{7}{9} : M\left(\frac{7}{9}; -\frac{1}{9}; \frac{7}{9}\right)$ et $d(I; (D)) = IM = \frac{5}{3}$.

6. $d(I; (ABC)) = \frac{|4+1+2-3|}{3} = \frac{4}{3}$.

7. a. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 6 - \frac{38}{9} = \frac{16}{9} : \text{sphère de centre } I \text{ et de rayon } \frac{4}{3} = d(I; (ABC)) : \text{tangente.}$

7. b. $(Q) : 2x + y + 2z + d = 0$ avec $\frac{|7+d|}{3} = \frac{4}{3} \iff d \in \{-3; -11\} ; d = -3$ redonne (ABC) , donc $(Q) : 2x + y + 2z - 11 = 0$.

Exercice 10

1. a. $\overrightarrow{AB}(-2; -3; -1), \overrightarrow{AC}(2; 2; -1) : \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (3+2; -2-2; -4+6) = (5; -4; 2)$. Aire $= \frac{1}{2}\sqrt{25 + 16 + 4} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

1. b. $(ABC) : 5x - 4y + 2z + 17 = 0$.

2. $(S) : (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{81}{4} : \Omega\left(1; 3; -\frac{1}{2}\right), R = \frac{9}{2}$. $d(\Omega; (ABC)) = \frac{|5-12-1+17|}{\sqrt{45}} = \frac{3}{\sqrt{5}} < \frac{9}{2} : \text{cercle de centre } H\left(0; \frac{19}{5}; -\frac{9}{10}\right)$ (projeté de Ω) et de rayon $\sqrt{\frac{81}{4} - \frac{9}{5}} = \frac{3\sqrt{205}}{10}$.

3. $d(B; (AC)) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{\sqrt{45}}{3} = \sqrt{5}$.

4. a. $(2; 0; -2)$ et $(5; -4; 2)$ non colinéaires : sécants ; direction $(2; 0; -2) \wedge (5; -4; 2) = (-8; -14; -8)$, soit $\vec{u}(4; 7; 4)$.

4. b. $0 - 2\left(-\frac{17}{2}\right) - 17 = 0$ et $0 - 0 - 17 + 17 = 0$.

4. c. $(D) : x = 4t, y = 7t, z = -\frac{17}{2} + 4t \ (t \in \mathbb{R})$.

5. a. $(x - m)^2 + (y - m)^2 + (z - m - 3)^2 = m^2 + m^2 + (m + 3)^2 - 5m + 10 = 3m^2 + m + 19$, et $3m^2 + m + 19 > 0$ (discriminant $1 - 228 < 0$).

5. b. $\Omega_m = (0; 0; 3) + m(1; 1; 1) : \text{la droite passant par } (0; 0; 3) \text{ dirigée par } (1; 1; 1)$.

5. c. $d(\Omega_m; (P)) = \frac{|2m-2m-6-17|}{\sqrt{8}} = \frac{23}{2\sqrt{2}}$, constante. On compare R_m^2 et $\frac{529}{8} : 3m^2 + m + 19 - \frac{529}{8} = \frac{24m^2+8m-377}{8}$, de racines $m_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2266}}{12}$. Si $m < m_1$ ou $m > m_2$: cercle ; si $m \in \{m_1; m_2\} : (P)$ tangent ; si $m_1 < m < m_2$: intersection vide.