

Corrigé détaillé de la série — Chapitre 16

Analytique de l'espace

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — méthodes utilisées

- **Colinéarité** : trois déterminants extraits nuls ; il suffit d'un déterminant extrait non nul pour conclure à la non-colinéarité.
- **Coplanarité** : $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = 0$, développé selon la première colonne.
- **Positions relatives** : on compare d'abord les vecteurs directeurs, puis on résout un système ; un système sans solution est une **contradiction** qui prouve l'absence de point commun.
- Tous les résultats ont été contrôlés par calcul exact (Python/sympy, `build/verif_lot4.py`).

Exercice 1

1. Construction : on place le point de coordonnées $(x; y)$ dans le plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$ puis on se déplace de $z\vec{k}$.
2. $I\left(\frac{3-5}{2}; \frac{-4+2}{2}; \frac{0+4}{2}\right) = I(-1; -1; 2)$.
3. $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(-8; 6; 4)$; $\vec{v}(3-5; -4+2; 0+4) = (-2; -2; 4)$; $\overrightarrow{AC}(-2; 8; -1)$, $\overrightarrow{BC}(6; 2; -5)$, donc $\vec{w}(-8+4-6; 6-16-2; 4+2+5) = (-10; -12; 11)$.
4. $ABCD$ parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff D = A + \overrightarrow{BC}$, soit $D(3+6; -4+2; 0-5) = D(9; -2; -5)$.

Exercice 2

1. a. $\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$, $\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$, $\begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$: colinéaires ($\vec{u} = -3\vec{v}$).
1. b. $\begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} = -2 - \frac{1}{4} = -\frac{9}{4} \neq 0$: **non colinéaires**.
2. a. $\overrightarrow{AB}(1; -2; -4)$, $\overrightarrow{AC}\left(\frac{1}{2}; -1; -2\right)$: $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$, donc A, B, C alignés.
2. b. $\overrightarrow{AB}(1; -3; 2)$, $\overrightarrow{AC}(2; 1; -2)$: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$: non alignés.
2. c. $\overrightarrow{AB}(1; -1; -1)$, $\overrightarrow{AC}(2; -2; m)$. Le premier déterminant extrait vaut $-2 + 2 = 0$; les deux autres valent $m + 2$ et $-m - 2$. Donc A, B, C alignés $\iff m + 2 = 0 \iff m = -2$.

Exercice 3

1. a. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(0+1) - 1(2-0) + 0 = 0$: coplanaires (d'ailleurs $\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{v}$).
1. b. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(-4-1) - 0 + 1(2-8) = -11 \neq 0$: non coplanaires.
2. a. $\overrightarrow{AB}(0; -4; 3)$, $\overrightarrow{AC}(1; 4; 0)$, $\overrightarrow{AD}(-2; 1; 2)$: $\det = 35 \neq 0$: non coplanaires.
2. b. $\overrightarrow{AB}(-5; 3; 2)$, $\overrightarrow{AC}(-2; 2; 0)$, $\overrightarrow{AD}(-1; 2; 3)$: $\det = -16 \neq 0$: non coplanaires.
2. c. $\overrightarrow{AB}(-3-m; -2; 1)$, $\overrightarrow{AC}(3-m; -4; 2)$, $\overrightarrow{AD}(-m; 0; 3)$; en développant : $\det = 6m + 54 = 6(m+9)$. Donc A, B, C, D coplanaires $\iff m = -9$.

Exercice 4

1. $x = 2 + t, y = 3 + 2t, z = 1 - t$ ($t \in \mathbb{R}$) ; en éliminant t : $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{-1}$, soit $2x - y - 1 = 0$ et $x + z - 3 = 0$.
2. $\overrightarrow{AB}(0; 3; 3)$ dirige (D) ; on prend $\vec{v}(0; 1; 1) : x = 1, y = -1 + t, z = t$ ($t \in \mathbb{R}$) ; équations : $x = 1$ et $y - z + 1 = 0$.
3. (Δ) est dirigée par $(3; 2; 0) : x = 2 + 3t, y = 3 + 2t, z = 1$; équations : $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{2}$ et $z = 1$, soit $2x - 3y + 5 = 0$ et $z = 1$.

Exercice 5

1. $\vec{u}(-1; 1; 3), \vec{v}(2; -1; 1)$ non colinéaires ($\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$). Avec $A(1; 2; 0), B(-1; 0; 3) : \det(\overrightarrow{AB}; \vec{u}; \vec{v}) = -25 \neq 0 : (D)$ et (D') **ne sont pas coplanaires**.
2. $(D) : A(3; -2; 1), \vec{u}(2; 2; 1) ; (D') : B(-2; 2; 0), \vec{v}(4; 4; 2) = 2\vec{u} : \text{parallèles. } B \in (D) ? \frac{-2-3}{2} = -\frac{5}{2} \text{ et } \frac{2+2}{2} = 2 : \text{différents, donc } B \notin (D) : \textbf{strictement parallèles.}$
3. $(D') : \text{on cherche un vecteur } (p; q; r) \text{ vérifiant } p - q = 0 \text{ et } 21p + 14q - r = 0 : \vec{v}(1; 1; 35), \text{ et } B(0; 3; 42) \in (D'). \vec{u}(-1; 0; 2) \text{ et } \vec{v} \text{ non colinéaires. On remplace la paramétrisation de } (D) \text{ dans les équations de } (D') : (1-t)-2+3 = 0 \iff t = 2, \text{ et } 21(1-t) + 28 - (3+2t) = 46 - 23t = 0 \iff t = 2. \text{ Les deux équations sont compatibles : sécantes au point } (-1; 2; 7).$
4. $(D) : x = t, y = t, z = 3t - 2$ (vecteur $(1; 1; 3)$) ; $(D') : x = k, y = -1, z = k + 1$ (vecteur $(1; 0; 1)$), non colinéaires. Un point commun vérifierait $t = k, t = -1, 3t - 2 = k + 1$, soit $-5 = 0 : \textbf{contradiction.}$ Pas de point commun et non parallèles : **non coplanaires** (contrôle : $\det = -5 \neq 0$).
5. $(D) : A(-1; -1; -3), \vec{u}(3; 0; 2) ; (D') : B(1; -1; -2), \vec{v}(2; 1; 3)$ non colinéaires ; $\det(\overrightarrow{AB}; \vec{u}; \vec{v}) = -1 \neq 0 : \textbf{non coplanaires.}$

Exercice 6

1. a. $\det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x+1 & -1 & 3 \\ y-3 & 0 & -4 \\ z-4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4(x+1) + 5(y-3) + 4(z-4)$, d'où $(P) : 4x + 5y + 4z - 27 = 0$.
1. b. (P) contient A et est dirigé par $\vec{i}, \vec{k} : (P) : y = 2$.
1. c. $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y+1 & 1 & -1 \\ z & 0 & -1 \end{vmatrix} = -x + (y+1) - 2z : (P) : x - y + 2z - 1 = 0$.
2. a. $\overrightarrow{AB}(1; -3; 0), \overrightarrow{AC}(-3; -1; -1) : (ABC) : 3x + y - 10z + 8 = 0 ; \text{représentation : } x = \alpha - 3\beta, y = 2 - 3\alpha - \beta, z = 1 - \beta ((\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2).$
2. b. $\overrightarrow{AB}(-1; \frac{1}{2}; -1), \overrightarrow{AC}(\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2}) : (ABC) : 3x - 4y - 5z + 5 = 0 ; \text{représentation : } x = -\alpha + \frac{1}{2}\beta, y = \frac{1}{2}\alpha + \beta, z = 1 - \alpha - \frac{1}{2}\beta.$
3. Les deux droites sont dirigées par $\vec{u}(3; 2; -2) : \text{elles sont parallèles, et } B(-2; -1; 3) \notin (D) (t = -1 \text{ par } x \text{ donne } y = 0 \neq -1). \text{ Deux droites strictement parallèles définissent un unique plan, dirigé par } \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{AB}(-3; -3; 6) \text{ avec } A(1; 2; -3) : (P) : 2x - 4y - z + 3 = 0.$
4. La droite passe par $B(1; 2; -3)$, dirigée par $\vec{u}(2; -3; 2) ; \overrightarrow{AB}(-1; 0; -4)$ non colinéaire à $\vec{u}$ (A hors de la droite). Plan $P(A; \vec{u}; \overrightarrow{AB}) : 4x + 2y - z - 11 = 0$.

Exercice 7

1. a. $\det((3; 1; 1); (1; 2; 3); (2; 1; 1)) = 3(2-3) - 1(1-6) + 1(1-4) = -1 \neq 0 : \text{sécants. En résolvant } 1+3t = 3+\alpha+2\beta, -1+t = -1+2\alpha+\beta, 2+t = 2+3\alpha+\beta, \text{ on trouve } \alpha = 0, \beta = 2, t = 2 : \text{point } (7; 1; 4).$
1. b. $(D) : y = x+1, z = 2x+1 ; \text{vecteur } (1; 1; 2) ; \vec{n}(3; 1; -1) : 3+1-2 = 2 \neq 0 : \text{sécants. } 3x+(x+1)-(2x+1)+5 = 0 \iff x = -\frac{5}{2} : \text{point } (-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}; -4).$
1. c. $\det((2; 1; 4); (1; 1; 1); (1; -2; 3)) = -4 \neq 0 : \text{sécants, en } t = -\frac{1}{4} : \text{point } (\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}; -3).$

2. a. (D) passe par $B(-1; 2; 1)$, dirigée par $\vec{u}(3; 1; 3); \vec{AB}(0; 2; -2)$. $(P) = P(A; \vec{u}; \vec{AB}) : 4x - 3y - 3z + 13 = 0$.
2. b. $4(1 - 2t) - 9 - 3(4 + t) + 13 = 0 \iff -4 - 11t = 0 \iff t = -\frac{4}{11} : (P) \cap (\Delta) = \left\{ \left(\frac{19}{11}; 3; \frac{40}{11} \right) \right\}$.

Exercice 8

- $(2; -1; 1)$ et $(1; 2; 1)$ non proportionnels : sécants. En posant $z = 5t : x = -\frac{2}{5} - 3t, y = \frac{1}{5} - t, z = 5t (t \in \mathbb{R})$.
- $(4; -2; 2) = -2(-2; 1; -1)$ mais $-1 \neq -2 \times 1$: **strictement parallèles**.
- (Q) est obtenue en multipliant l'équation de (P) par $-\sqrt{2}$ (y compris le terme constant : $-\sqrt{2} \times (-2\sqrt{2}) = 4$) : **confondus**.
- Sécants ; $x = \frac{1}{4} + 3t, y = -\frac{5}{4} + t, z = 4t (t \in \mathbb{R})$.
- $(Q) = P((1; -2; 0); (2; -1; 1); (-1; 0; 1))$ a pour équation $x + 3y + z + 5 = 0$; $(-2; 2; 1)$ et $(1; 3; 1)$ non proportionnels : sécants. $x = -\frac{7}{8} + t, y = -\frac{11}{8} - 3t, z = 8t (t \in \mathbb{R})$.
- $(P) : 2x + 5y - 5z - 15 = 0, (Q) : x - 2y - z + 2 = 0$; non proportionnels : sécants. $x = \frac{20}{9} + 5t, y = \frac{19}{9} + t, z = 3t (t \in \mathbb{R})$.