

Corrigé détaillé de la série — Chapitre 15

Vecteurs de l'espace

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — méthodes utilisées

- **Chasles** et égalités de vecteurs tirées des parallélogrammes (faces du cube, du pavé, du prisme).
- **Décomposition dans une base** : dans un cube ou un pavé, on exprime tout vecteur en fonction de $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e} = \overrightarrow{AE}$ (non coplanaires) ; dans un tétraèdre, de $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$. Deux décompositions égales ont les mêmes coefficients : c'est ce qui permet d'obtenir des **contradictions**.
- Tous les résultats ont été contrôlés par calcul exact en coordonnées (Python/sympy, `build/verif_lot4.py`).

Exercice 1

Dans le prisme, $ADFC$, $ADEB$ et $BEFC$ sont des parallélogrammes, donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{ED}$.

1. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF}$ (Chasles).
2. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$.
3. Soit K le milieu de $[GE]$: $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BE}) = \overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$. Donc $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{BK} - \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{ED}) = \overrightarrow{EI}$ car I est le milieu de $[DF]$. Ainsi $K = I$: I est le milieu de $[GE]$.

Exercice 2

1. $EGCA$ est un parallélogramme (rectangle diagonal du pavé), donc $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$. Par Chasles, $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{CA}$. Le vecteur $\overrightarrow{DG}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{CA}$ (non colinéaires) : **les trois vecteurs sont coplanaires**.
2. Dans la base $(\vec{b}; \vec{d}; \vec{e})$: $\overrightarrow{AI} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{e}$; $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \vec{b} - \vec{d} + \vec{e}$; $\overrightarrow{HE} = -\vec{d}$. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AI} = \alpha\overrightarrow{DF} + \beta\overrightarrow{HE}$. Alors $\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{e} = \alpha\vec{b} - (\alpha + \beta)\vec{d} + \alpha\vec{e}$, et par unicité des coefficients : $\alpha = 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$: **contradiction**. Comme $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{HE}$ ne sont pas colinéaires, **les trois vecteurs ne sont pas coplanaires**.

Exercice 3

1. $\overrightarrow{EF} = \vec{b}$ et $\overrightarrow{CH} = -\vec{b} + \vec{e}$, donc $\overrightarrow{AM} = \vec{e} = \overrightarrow{AE}$: $M = E$. $\overrightarrow{AN} = (\vec{b} + \vec{d} + \vec{e}) - \vec{e} = \vec{b} + \vec{d} = \overrightarrow{AC}$: $N = C$. $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB} = (\vec{b} + \vec{d} + \vec{e}) + (\vec{b} - \vec{d} - \vec{e}) = 2\vec{b}$, donc $\overrightarrow{HR} = \vec{b} = \overrightarrow{HG}$: $R = G$.
2. a. $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EP} = -\frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{d}) + \vec{e} + \frac{1}{3}\vec{d} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$.
2. b. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\vec{e}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG}) = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{d} + \frac{1}{2}\vec{e}$, donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}\vec{d} + \vec{e} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{d}) = \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{d} + \frac{1}{2}\vec{e}$, donc $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.
2. c. $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$: les vecteurs sont colinéaires, donc I, J, K sont alignés.

Exercice 4

1. $2\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{MA} \iff 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM}) = -\overrightarrow{AM} \iff 3\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{AI} \iff \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
2. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d} + \vec{e}$, donc $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{d} + \frac{2}{3}\vec{e}$ et $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{AM} - \vec{e} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{d} - \vec{e})$. Or $\overrightarrow{EC} = \vec{b} + \vec{d} - \vec{e}$. Donc $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$: E, M, C sont **alignés** (M est au tiers de $[EC]$ à partir de E).
3. $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{e}$, $\overrightarrow{AK} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}$, donc $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d} - \vec{e}$. Or $\overrightarrow{CE} = -\vec{b} - \vec{d} + \vec{e}$ et $\overrightarrow{CG} = \vec{e}$: $-\frac{1}{2}\overrightarrow{CE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{e} - \frac{1}{2}\vec{e} = \overrightarrow{JK}$.

Exercice 5

1. **a.** $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\vec{e}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AH}) = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{d} + \vec{e}$, donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{d} + \frac{1}{2}\vec{e}$. Et $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH}) = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d} + \vec{d} + \vec{e}) = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{d} + \frac{1}{2}\vec{e}$. Donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AO}$.
1. **b.** $O \in (CH) \subset (ACH)$ et $A \in (ACH)$ donc $(AO) \subset (ACH)$; (IJ) est dirigée par $\overrightarrow{AO}$, vecteur du plan (ACH) : (IJ) est parallèle au plan (ACH) .
2. D'après 1.a, $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$.
3. $D(O; \overrightarrow{IJ}) = D(O; \overrightarrow{AO})$ est la droite (AO) . $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{AF}$, et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DG}$ ($ADGF$ parallélogramme) : $D(G; \overrightarrow{AF})$ est la droite (DG) .

Exercice 6

1. $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{GH}$ ne sont pas colinéaires ; le plan $P(G; \overrightarrow{GF}; \overrightarrow{GH})$ contient G, F et H : c'est le plan (FGH) , c'est-à-dire le plan de la face $EFGH$.
2. $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas colinéaires ; l'ensemble cherché est le plan $P(A; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE}) = (ACE)$, qui contient aussi G ($\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$) : c'est le plan $(ACGE)$.

Exercice 7

1. Figure : I sur $[EF]$ au tiers à partir de E , J sur $[GC]$ aux deux tiers à partir de G .
2. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{e}$; $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GC} = \vec{b} + \vec{d} + \frac{1}{3}\vec{e}$; donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{3}\vec{b} + \vec{d} - \frac{2}{3}\vec{e}$. Or $\frac{2}{3}\overrightarrow{EC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{FG} = \frac{2}{3}(\vec{b} + \vec{d} - \vec{e}) + \frac{1}{3}\vec{d} = \frac{2}{3}\vec{b} + \vec{d} - \frac{2}{3}\vec{e} = \overrightarrow{IJ}$.
3. $\overrightarrow{IJ}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$ (non colinéaires) : les trois vecteurs sont coplanaires.

Exercice 8

1. Figure laissée au lecteur.
2. **a.** $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{AJ} = \vec{b} + \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$, donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AK} = \vec{c} + \frac{2}{3}(\vec{d} - \vec{c}) = \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{d}$, $\overrightarrow{AL} = \vec{d} - \frac{1}{3}\vec{d} = \frac{2}{3}\vec{d}$, donc $\overrightarrow{KL} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
2. **b.** $\overrightarrow{KL} = -\overrightarrow{IJ}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$: les droites (IJ) et (KL) sont parallèles, donc I, J, K, L sont coplanaires, et $IJKL$ est un **parallélogramme** (non aplati car $L \notin (IJ)$: $\overrightarrow{IL}$ ci-dessous n'est pas colinéaire à $\vec{c}$).
3. $\overrightarrow{IL} = \frac{2}{3}\vec{d} - \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$. La droite (BD) est dirigée par un vecteur du plan (IJK) : elle est parallèle à ce plan.

Exercice 9

1. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $E \in P(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = (ABC)$.
2. $\overrightarrow{CE} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$ et $\overrightarrow{CD} = \vec{d} - \vec{c}$. Par l'absurde, si $\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CD}$, alors $\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} = k\vec{d} - k\vec{c}$; par unicité des coefficients, le coefficient de $\vec{b}$ donne $1 = 0$: **contradiction**. Donc E, C, D ne sont pas alignés.
3. $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, donc $F \in (ACD)$; ainsi A, C, D, F sont coplanaires et les droites (FC) et (AD) sont contenues dans le plan (ACD) : elles sont coplanaires.
4. $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AC} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.
5. $\frac{3}{2}\overrightarrow{CG} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CF}$: C, F, G sont alignés, donc $G \in (FC)$. Et $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AD}$ donne $G \in (AD)$. Les droites (AD) et (FC) ne sont pas parallèles ($\overrightarrow{CF}$ a un coefficient non nul sur $\overrightarrow{AC}$) ; elles ont donc au plus un point commun : c'est G .

Exercice 10

On travaille dans la base $(\vec{b}; \vec{d}; \vec{p}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AP})$; $\overrightarrow{AC} = \vec{b} + \vec{d}$.

1. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$: colinéaires.

2. (MN) est dirigée par $\overrightarrow{AD}$, vecteur du plan (PAD) : (MN) est parallèle au plan (PAD) .
3. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \frac{1}{3}(\vec{p} - \vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{p}$ et $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\vec{b}$, donc $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AP}$. Le plan (MNS) est dirigé par $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AP}$, deux vecteurs non colinéaires dirigeant aussi (PAD) : les plans (MNS) et (PAD) sont parallèles (strictement, car $S \notin (PAD)$: $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\vec{b}$ n'est pas combinaison de $\vec{d}$ et $\vec{p}$).