

Corrigé détaillé de la série — Chapitre 14

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — méthodes utilisées

- **Raisonnement direct** : chaîne d'implications $\implies$; un diviseur commun de deux entiers divise toute combinaison linéaire de ces entiers.
- **Restes de puissances** : on cherche une petite puissance congrue à 1 (ou -1), puis on écrit la D.E. de l'exposant.
- **Disjonction de cas** : on examine tous les restes possibles modulo n (Cas 1, Cas 2, ...).
- **Récurrence** en trois étapes : Initialisation, Hérédité, Conclusion.
- Tous les résultats ont été contrôlés par Python/sympy (`build/verif_lot3.py`).

Exercice 1

1. $156 = 2^2 \times 3 \times 13$, donc 156 a $(2+1)(1+1)(1+1) = 12$ diviseurs positifs : 1, 2, 3, 4, 6, 12, 13, 26, 39, 52, 78, 156.
2. Les diviseurs positifs de $8 = 2^3$ sont 1, 2, 4, 8 ; les diviseurs de -8 dans $\mathbb{Z}$ sont donc $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ (huit diviseurs).

Exercice 2

Raisonnement direct, par combinaisons linéaires.

1. **a.** a divise $2b + c$ et a divise $b + c \implies a$ divise $2(b + c) - (2b + c) = c$.
1. **b.** a divise $2b + 3c$ et a divise $b + c \implies a$ divise $(2b + 3c) - 2(b + c) = c$.
1. **c.** On remarque que $xb - cy = x(b - c) + c(x - y)$. Donc a divise $b - c$ et a divise $x - y \implies a$ divise $x(b - c) + c(x - y) = xb - cy$.
2. a divise $12n + 1$ et a divise $-2n + 3 \implies a$ divise $(12n + 1) + 6(-2n + 3) = 19$.
3. d divise $n^2 + 3$ et d divise $2n - 1 \implies d$ divise $4(n^2 + 3)$ et d divise $(2n - 1)(2n + 1) = 4n^2 - 1 \implies d$ divise $4(n^2 + 3) - (4n^2 - 1) = 13$.

Exercice 3

a divise $5x + 7$ et a divise $2x - 3 \implies a$ divise $2(5x + 7) - 5(2x - 3) = 14 + 15 = 29$.

Exercice 4

Raisonnement par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$: « 3 divise $4^n - 1$ ».

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $4^0 - 1 = 0 = 3 \times 0$: 3 divise 0, donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que 3 divise $4^n - 1$: il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $4^n - 1 = 3k$, soit $4^n = 3k + 1$. Alors $4^{n+1} - 1 = 4(3k + 1) - 1 = 12k + 3 = 3(4k + 1)$ avec $4k + 1 \in \mathbb{N}$: 3 divise $4^{n+1} - 1$.
- **Conclusion.** D'après le principe du raisonnement par récurrence, 3 divise $4^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

$n - 1$ divise $2n + 7 \iff n - 1$ divise $(2n + 7) - 2(n - 1) = 9$ (car $n - 1$ divise $2(n - 1)$; l'équivalence vient de ce que $2n + 7 = 2(n - 1) + 9$) $\iff n - 1 \in \{-9; -3; -1; 1; 3; 9\} \iff n \in \{-8; -2; 0; 2; 4; 10\}$.

Exercice 6

Par division : $n^3 + 8 = (n + 4)(n^2 - 4n + 16) - 56$. Donc $\frac{n^3+8}{n+4} = n^2 - 4n + 16 - \frac{56}{n+4}$ et $\frac{n^3+8}{n+4} \in \mathbb{Z} \iff n + 4$ divise 56. Les diviseurs de $56 = 2^3 \times 7$ sont $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, \pm 8, \pm 14, \pm 28, \pm 56$. Donc $n = d - 4$ avec d l'un de ces diviseurs : $n \in \{-60; -32; -18; -12; -11; -8; -6; -5; -3; -2; 0; 3; 4; 10; 24; 52\}$ (seize valeurs).

Exercice 7

1. $x^2 - y^2 = 32 \iff (x - y)(x + y) = 32$, avec $0 < x - y < x + y$ (car $x > y \geq 0$). De plus $x - y$ et $x + y$ ont la même parité (leur somme $2x$ est paire) ; leur produit étant pair, ils sont tous deux pairs. Les factorisations $32 = 2 \times 16 = 4 \times 8$ donnent : $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 16 \end{cases} \iff (x; y) = (9; 7)$ et $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 8 \end{cases} \iff (x; y) = (6; 2)$.
 $S = \{(9; 7); (6; 2)\}$.

2. $2xy + 2x + y = 99 \iff 2x(y + 1) + (y + 1) = 100 \iff (2x + 1)(y + 1) = 100$. $2x + 1$ est un diviseur **impair** de $100 : 1, 5$ ou 25 . Cas 1 : $2x + 1 = 1, y + 1 = 100 : (0; 99)$. Cas 2 : $2x + 1 = 5, y + 1 = 20 : (2; 19)$. Cas 3 : $2x + 1 = 25, y + 1 = 4 : (12; 3)$. $S = \{(0; 99); (2; 19); (12; 3)\}$.

Exercice 8

23451 a pour somme des chiffres 15, donc $23451 \equiv 15 \equiv 6 [9]$. Or $6^2 = 36 \equiv 0 [9]$, donc $23451^{100} \equiv 6^{100} = (6^2)^{50} \equiv 0 [9]$: le reste est 0. $100 \equiv 1 [9]$ donc $100^{23451} \equiv 1 [9]$ et $100^{23451} + 23451^{100} \equiv 1 + 0 = 1 [9]$: le reste est 1.

Exercice 9

1. $5^2 = 25 \equiv 8 [17], 5^4 \equiv 64 \equiv 13 \equiv -4 [17], 5^8 \equiv (-4)^2 = 16 \equiv -1 [17]$.
 2. $5^{16} = (5^8)^2 \equiv (-1)^2 = 1 [17]$: reste 1. $500 = 16 \times 31 + 4$, donc $5^{500} = (5^{16})^{31} \times 5^4 \equiv 1 \times 13 [17]$: reste 13.

Exercice 10

$a \equiv 17 \equiv -2 [19]$ et $b \equiv 15 \equiv -4 [19]$.

1. $a + b \equiv -6 \equiv 13 [19]$: reste 13. 2. $a^2 + b^2 \equiv 4 + 16 = 20 \equiv 1 [19]$: reste 1. 3. $2a - 5b \equiv -4 + 20 = 16 [19]$: reste 16.

Exercice 11

3^{2007} est impair : le reste par 2 est 1. $3^3 = 27 \equiv 1 [13]$ et $2007 = 3 \times 669$, donc $3^{2007} = (3^3)^{669} \equiv 1 [13]$: reste 1.

Exercice 12

$73 = 7 \times 10 + 3$, donc $73 \equiv 3 [7]$; $3^3 = 27 \equiv -1 [7]$, donc $3^6 \equiv 1 [7]$. $2019 = 6 \times 336 + 3$: $73^{2019} \equiv (3^6)^{336} \times 3^3 \equiv -1 \equiv 6 [7]$. Reste 6.

Exercice 13

$19 \equiv 5 \equiv -2 [7]$ et $23 \equiv 2 [7]$; $2^3 \equiv 1 [7]$. $19^{52} \equiv (-2)^{52} = 2^{52} = (2^3)^{17} \times 2 \equiv 2 [7]$ et $23^{41} \equiv 2^{41} = (2^3)^{13} \times 2^2 \equiv 4 [7]$. Donc $19^{52} \times 23^{41} \equiv 8 \equiv 1 [7]$: reste 1.

Exercice 14

$22 \equiv 2 [5], 2^4 = 16 \equiv 1 [5], 33 = 4 \times 8 + 1 : 22^{33} \equiv 2 [5]. 33 \equiv 3 \equiv -2 [5], 22 = 4 \times 5 + 2 : 33^{22} \equiv (-2)^{22} = (2^4)^5 \times 4 \equiv 4 [5]$. Somme : $6 \equiv 1 [5]$, reste 1.

Exercice 15

1. $3^1 \equiv 3, 3^2 \equiv 2, 3^3 \equiv 6, 3^4 \equiv 4, 3^5 \equiv 5, 3^6 \equiv 1 [7]$. Soit $n = 6k + r$ ($k \in \mathbb{N}, 0 \leq r \leq 5$) : $3^n = (3^6)^k 3^r \equiv 3^r [7]$. Le reste vaut 1, 3, 2, 6, 4, 5 selon que $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

2. $2019 = 7 \times 288 + 3 : 2019 \equiv 3 [7]$ donc $2019^{2019} \equiv 3^{2019} [7]$; $2019 = 6 \times 336 + 3$, donc $r = 3$ et le reste est 6.

Exercice 16

Dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}\}$, on teste les quatre classes (disjonction de cas).

- $\bar{2}x$ prend les valeurs $\bar{0}, \bar{2}, \bar{0}, \bar{2}$: jamais $\bar{3}$. $S = \emptyset$.
- $x^2 + \bar{3}x$ vaut $\bar{0}, \bar{0}, \bar{10} = \bar{2}, \bar{18} = \bar{2}$ pour $x = \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$. $S = \{\bar{0}; \bar{1}\}$.
- $\bar{2013} = \bar{1}$ (car $2013 = 4 \times 503 + 1$). $x^3 + \bar{2}x$ vaut $\bar{0}, \bar{3}, \bar{12} = \bar{0}, \bar{33} = \bar{1}$. D'où : si $\bar{k} = \bar{0}$, $S = \{\bar{0}; \bar{2}\}$; si $\bar{k} = \bar{1}$, $S = \{\bar{3}\}$; si $\bar{k} = \bar{2}$, $S = \emptyset$; si $\bar{k} = \bar{3}$, $S = \{\bar{1}\}$.

Exercice 17

$x + \bar{3}y = \bar{1} \iff x = \bar{1} - \bar{3}y$. Pour chaque y , x est unique : $S = \{(\bar{1}; \bar{0}); (\bar{3}; \bar{1}); (\bar{0}; \bar{2}); (\bar{2}; \bar{3}); (\bar{4}; \bar{4})\}$ (cinq couples).

Exercice 18

Raisonnement par équivalences. On multiplie la 2e équation par $\bar{3}$ (inverse de $\bar{2}$ car $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{1}$) : $\bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \iff x + \bar{12}y = \bar{9} \iff x + \bar{2}y = \bar{4} \iff x = \bar{4} - \bar{2}y = \bar{4} + \bar{3}y$. En reportant dans la 1re : $\bar{3}(\bar{4} + \bar{3}y) + \bar{2}y = \bar{1} \iff \bar{12} + \bar{11}y = \bar{1} \iff \bar{2} + y = \bar{1} \iff y = \bar{4}$, puis $x = \bar{4} + \bar{12} = \bar{16} = \bar{1}$. $S = \{(\bar{1}; \bar{4})\}$. Vérification : $\bar{3} + \bar{8} = \bar{11} = \bar{1}$ et $\bar{2} + \bar{16} = \bar{18} = \bar{3}$.

Exercice 19

- $3^0 \equiv 1, 3^1 \equiv 3, 3^2 \equiv 9, 3^3 \equiv 7, 3^4 \equiv 1 [10]$. Pour $n = 4k + r$ ($0 \leq r \leq 3$) : $3^n \equiv 3^r [10]$; le reste vaut 1, 3, 9, 7 pour $r = 0, 1, 2, 3$.
- $2029 \equiv 9 \equiv -1 [10]$ et 2020 est pair : $2029^{2020} \equiv 1 [10]$. Le chiffre des unités est 1.
- Disjonction de cas suivant n modulo 4 (on a $5n \equiv 0 [10]$ si n pair, $5n \equiv 5 [10]$ si n impair). Cas 1 : $n = 4k : 1 + 0 + 2 = 3 \not\equiv 0$. Cas 2 : $n = 4k + 1 : 3 + 5 + 2 = 10 \equiv 0$: convient. Cas 3 : $n = 4k + 2 : 9 + 0 + 2 = 11 \not\equiv 0$. Cas 4 : $n = 4k + 3 : 7 + 5 + 2 = 14 \not\equiv 0$. Les solutions sont les $n \in \mathbb{N}$ tels que $n \equiv 1 [4]$.

Exercice 20

$24537 \equiv 7 [10]$; $7^2 \equiv 9, 7^4 \equiv 81 \equiv 1 [10]$; $2018 = 4 \times 504 + 2 : 24537^{2018} \equiv 7^2 \equiv 9 [10]$. Chiffre des unités : 9.

Exercice 21

$2^6 = 64 \equiv 1 [9]$: $2^n [9]$ ne dépend que de n modulo 6; $n^2 [9]$ ne dépend que de n modulo 9. On étudie donc n modulo $18 = \text{PPCM}(6; 9)$: pour $n = 18k + r$, $2^n \equiv 2^r$ et $n^2 \equiv r^2 [9]$. On teste $r \in \{0; \dots; 17\}$: les restes de 2^r sont 1, 2, 4, 8, 7, 5 (période 6) et ceux de r^2 sont 0, 1, 4, 0, 7, 7, 0, 4, 1 (période 9). L'égalité n'a lieu que pour $r = 2$ ($4 = 4$) et $r = 4$ ($7 = 7$). Les solutions sont les $n \in \mathbb{N}$ tels que $n \equiv 2 [18]$ ou $n \equiv 4 [18]$.

Exercice 22

$3^2 = 9 \equiv 1 [8]$. Disjonction de cas. Cas 1 : n pair : $3^n \equiv 1 [8]$, l'équation devient $5n + 2 \equiv 0 [8] \iff 5n \equiv 6 [8] \iff 25n \equiv 30 [8] \iff n \equiv 6 [8]$ (car $25 \equiv 1$ et $30 \equiv 6$), ce qui est compatible avec n pair. Cas 2 : n impair : $3^n \equiv 3 [8]$ et $5n + 4 \equiv 0 [8] \iff n \equiv 20 \equiv 4 [8]$: n serait pair, contradiction; pas de solution. $S = \{n \in \mathbb{N} / n \equiv 6 [8]\}$.

Exercice 23

D'après l'exercice 14 : $22^{33} \equiv 2$ et $33^{22} \equiv 4 [5]$; le produit est $\equiv 8 \equiv 3 [5]$: reste 3.

Exercice 24

3^{2019} est impair : reste 1 par 2. $3^3 \equiv 1 [13]$ et $2019 = 3 \times 673 : 3^{2019} \equiv 1 [13]$, reste 1.

Exercice 25

1. Raisonnement par récurrence.

- **Initialisation.** Pour $n = 1$, on a $2^2 + 6 - 1 = 9 : 9$ divise 9.
 - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que 9 divise $2^{2n} + 6n - 1$: il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^{2n} + 6n - 1 = 9k$, soit $2^{2n} = 9k - 6n + 1$. Alors $2^{2(n+1)} + 6(n+1) - 1 = 4 \times 2^{2n} + 6n + 5 = 4(9k - 6n + 1) + 6n + 5 = 36k - 18n + 9 = 9(4k - 2n + 1)$ avec $4k - 2n + 1 \in \mathbb{Z}$ (et même dans $\mathbb{N}$ puisque le nombre est positif) : 9 divise $2^{2(n+1)} + 6(n+1) - 1$.
 - **Conclusion.** D'après le principe du raisonnement par récurrence, 9 divise $2^{2n} + 6n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^* : 4^n + 6n - 1 \equiv 0 [9] \implies 4^n \equiv 1 - 6n [9] \implies 4^n \equiv 1 - 6n + 9n = 3n + 1 [9]$.

Exercice 26

$1653 = 11 \times 150 + 3$, donc $1653 \equiv 3 [11]$; $3^5 = 243 = 11 \times 22 + 1 \equiv 1 [11]$ et $351 = 5 \times 70 + 1 : 1653^{351} \equiv 3 [11]$.
 $43 \equiv -1 [11]$ et 137 est impair : $43^{137} \equiv -1 [11]$. Somme : $3 - 1 = 2$; reste 2.

Exercice 27

Pour $k \in \{1; 2; 3\} : 7 - k \equiv -k [7]$ et 2019 est impair, donc $(7 - k)^{2019} \equiv (-k)^{2019} = -k^{2019} [7]$. En groupant 1 avec 6, 2 avec 5, 3 avec 4 : la somme est $\equiv 0 [7]$, donc 7 la divise.

Exercice 28

Raisonnement direct. Soit $d = \text{PGCD}(n; n+1) : d$ divise n et d divise $n+1 \implies d$ divise $(n+1) - n = 1 \implies d = 1$ (car $d \geq 1$).

Exercice 29

1. Soit $n \in \mathbb{N} : 4U_n + 9n = 4^{n+1} - 12n - 4 + 9n = 4^{n+1} - 3(n+1) - 1 = U_{n+1}$.
2. Raisonnement par récurrence.
 - **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $4^0 - 0 - 1 = 0$ et 9 divise 0.
 - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que 9 divise $4^n - 3n - 1$: il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $4^n - 3n - 1 = 9k$. D'après 1., $4^{n+1} - 3(n+1) - 1 = 4 \times 9k + 9n = 9(4k + n)$ avec $4k + n \in \mathbb{N}$.
 - **Conclusion.** D'après le principe du raisonnement par récurrence, 9 divise $4^n - 3n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 30

1. $n^2 + 3n = n(n+3) : l'un des facteurs $n, n+3$ est pair (ils sont de parités différentes), donc $n^2 + 3n + 4$ est pair ; de même $n^2 - 3n = n(n-3)$ est pair. Ce sont des entiers naturels car $n^2 - 3n + 4 = \left(n - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$. Enfin $(n^2 + 4)^2 - (3n)^2 = n^4 + 8n^2 + 16 - 9n^2 = \alpha_n$.$
2. Raisonnement direct. Les deux facteurs sont pairs et non nuls, donc chacun est ≥ 2 et le produit α_n est divisible par 4 ; comme $\alpha_n \geq 16 > 4$ (car $n^4 - n^2 = n^2(n^2 - 1) \geq 0$), 4 est un diviseur de α_n différent de 1 et de $\alpha_n : \alpha_n$ n'est pas premier.

Exercice 31

1. $n^2 + 3 = (n+2)(n-2) + 7$, donc $\text{PGCD}(n^2 + 3; n+2) = \text{PGCD}(n+2; 7)$ (propriété $a \wedge b = b \wedge (a - kb)$).
2. $\frac{n^2+3}{n+2} \in \mathbb{N} \iff n+2 \text{ divise } n^2+3 \iff n+2 \text{ divise } 7 \text{ (car } n+2 \text{ divise } (n+2)(n-2)) \iff n+2 = 7 \text{ (car } n+2 \geq 2) \iff n = 5$. Vérification : $\frac{28}{7} = 4$.

Exercice 32

$a_n = (5^n - 1)(5^n + 1)(6^n - 1)(6^n + 1) = b_n \times (5^n + 1)(6^n + 1) : b_n$ divise a_n et $b_n > 0$ (pour $n \geq 1$). Donc $\text{PGCD}(a_n; b_n) = b_n = (5^n - 1)(6^n - 1)$.

Exercice 33

1. $(x - y)(x + y) = 45$ avec $0 < x - y < x + y : 1 \times 45, 3 \times 15, 5 \times 9$ donnent $(23; 22), (9; 6), (7; 2)$. $S = \{(23; 22); (9; 6); (7; 2)\}$.

2. $xy + 2x + 3y = 24 \iff (x + 3)(y + 2) = 30$ avec $x + 3 \geq 3$ et $y + 2 \geq 2 : (x + 3; y + 2) \in \{(3; 10); (5; 6); (6; 5); (10; 3); (15; 2)\}$. $S = \{(0; 8); (2; 4); (3; 3); (7; 1); (12; 0)\}$.

Exercice 34

$2n + 13 = 2(n + 3) + 7 : n + 3$ divise $2n + 13 \iff n + 3$ divise $7 \iff n + 3 \in \{-7; -1; 1; 7\} \iff n \in \{-10; -4; -2; 4\}$.

Exercice 35

$\frac{3n+8}{n+4} = 3 - \frac{4}{n+4}$; il est entier $\iff n + 4$ divise $4 \iff n + 4 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\} \iff n \in \{-8; -6; -5; -3; -2; 0\}$.

Exercice 36

$8316 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 11, 1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5, 1980 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$. $d = \text{PGCD}(8316; 1080) = 2^2 \times 3^3 = 108$; $m = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 = 41\,580$.

Exercice 37

$\text{PGCD}(a; b) \times \text{PPCM}(a; b) = ab$ donc $\text{PPCM}(a; b) = \frac{12}{2} = 6$. On écrit $a = 2a', b = 2b'$ avec $\text{PGCD}(a'; b') = 1 : 4a'b' = 12, a'b' = 3$, d'où $(a; b) \in \{(2; 6); (6; 2)\}$.

Exercice 38

Raisonnement direct. $n = aq + r$ avec $0 \leq r \leq a - 1$ et $q = bq' + r'$ avec $0 \leq r' \leq b - 1$. Alors $n = abq' + (ar' + r)$ et $0 \leq ar' + r \leq a(b - 1) + a - 1 = ab - 1 < ab$. Par unicité de la D.E. de n par ab , le quotient est q' (et le reste $ar' + r$).

Exercice 39

$19 \equiv -2$ et $23 \equiv 2[7] : 19^{41} \equiv -2^{41} = -(2^3)^{13} 2^2 \equiv -4[7]$ et $23^{52} \equiv 2^{52} \equiv 2[7]$. Produit : $-8 \equiv -1 \equiv 6[7]$; reste 6.

Exercice 40

1. Soit $n \in \mathbb{N}^* : n + 1 \equiv 1[n] \implies (n + 1)^{2019} \equiv 1[n] \implies (n + 1)^{2019} - 1 \equiv 0[n]$.

2. Soit $n \in \mathbb{N} : 4^2 = 16 \equiv 1[15] \implies 4^{2n+2} = (4^2)^{n+1} \equiv 1[15]$.

Exercice 41

On teste les cinq classes : $x^2 - x - 2$ vaut $-\bar{2} = \bar{3}, \bar{3}, \bar{0}, \bar{4}, \bar{10} = \bar{0}$ pour $x = \bar{0}, \dots, \bar{4}$. $S = \{\bar{2}; \bar{4}\}$.

Exercice 42

1. Raisonnement par double inclusion des diviseurs communs. Si δ divise a et b , alors δ divise $a - bc = d$; si δ divise b et d , alors δ divise $bc + d = a$. Les couples $(a; b)$ et $(b; d)$ ont les mêmes diviseurs communs, donc le même plus grand : $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; d)$.

2. On applique 1. avec $d = a - bc$.

Exercice 43

Soit $\delta = \text{PGCD}(A; B)$: δ divise A et $B \implies \delta$ divise $7B - 9A = (315a + 532) - (315a + 513) = 19$. Comme 19 est premier, $\delta \in \{1; 19\}$.

Exercice 44

1. $a - 4b = x$ et $9b - 2a = y$. Tout diviseur commun de x, y divise $a = 9x + 4y$ et $b = 2x + y$; tout diviseur commun de a, b divise $x = a - 4b$ et $y = 9b - 2a$. Mêmes diviseurs communs, donc $\text{PGCD}(x; y) = \text{PGCD}(a; b)$.
2. a. $n^2 + 5n + 13 = (n + 3)(n + 2) + 7$, donc $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; 7)$.
2. b. $\text{PGCD}(b; 7)$ divise 7, premier : $\text{PGCD}(a; b) \in \{1; 7\}$.
2. c. $\text{PGCD}(a; b) = 7 \iff 7$ divise $n + 3 \iff n \equiv -3 [7] \iff n \equiv 4 [7]$.
2. d. D'après b. et c. : $\text{PGCD}(a; b) = 1 \iff n \not\equiv 4 [7]$, c'est-à-dire $n \in \mathbb{N}$ et $n \neq 7k + 4$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 45

1. d_n divise $2n + 8$ et $3n + 15 \implies d_n$ divise $2(3n + 15) - 3(2n + 8) = 6$.
2. $d_n = 6 \iff 6$ divise $2n + 8$ et 6 divise $3n + 15$. 6 divise $2n + 8 \iff 3$ divise $n + 4 \iff n \equiv 2 [3]$; 6 divise $3n + 15 \iff 2$ divise $n + 5 \iff n$ impair. Donc $d_n = 6 \iff n \equiv 2 [3]$ et $n \equiv 1 [2] \iff n \equiv 5 [6]$.

Exercice 46

1. d divise $2^a - 1$, donc $2^a \equiv 1 [d]$ et $2^{ab} = (2^a)^b \equiv 1 [d]$.
2. d divise $2^b + 1$, donc $2^b \equiv -1 [d]$ et $2^{ab} = (2^b)^a \equiv (-1)^a = -1 [d]$ (a impair).
3. Par transitivité $1 \equiv -1 [d]$: d divise 2, donc $d \in \{1; 2\}$.
4. Raisonnement par l'absurde. Supposons $d = 2$: alors 2 divise $2^a - 1$, qui est impair ($a \geq 1$) : contradiction. Donc $d = 1$.

Exercice 47

- $2^6 = 64 = 63 + 1 \equiv 1 [21]$. Montrons d'abord que $4^m \equiv 4 [6]$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ (raisonnement par récurrence) :
- **Initialisation.** Pour $m = 1$, on a $4^1 = 4 \equiv 4 [6]$.
 - **Hérédité.** Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on suppose $4^m \equiv 4 [6]$: il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $4^m = 6k + 4$. Alors $4^{m+1} = 24k + 16 = 6(4k + 2) + 4 \equiv 4 [6]$.
 - **Conclusion.** D'après le principe du raisonnement par récurrence, $4^m \equiv 4 [6]$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}$: il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $4^{n+1} = 6k + 4$, d'où $2^{4^{n+1}} = (2^6)^k \times 2^4 \equiv 16 [21]$ et $2^{4^{n+1}} + 5 \equiv 21 \equiv 0 [21]$.

Exercice 48

$n = 25p + p^2$ avec $0 \leq p^2 < 25$, donc $p \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ et $n \in \{0; 26; 54; 84; 116\}$ (réciproquement ces valeurs conviennent par unicité de la D.E.).

Exercice 49

$a - 1 = bq + r$ avec $0 \leq r \leq b - 1$. Alors $ab^9 - 1 = (bq + r + 1)b^9 - 1 = qb^{10} + [(r + 1)b^9 - 1]$ et $0 \leq b^9 - 1 \leq (r + 1)b^9 - 1 \leq b \cdot b^9 - 1 < b^{10}$. Par unicité, le quotient est q (et le reste $(r + 1)b^9 - 1$).

Exercice 50

1. Binôme (Ch. 13) : $(n + 2)^{n+2} = \sum_{k=0}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$. Pour $k \geq 2$, n^2 divise n^k ; donc $(n + 2)^{n+2} \equiv 2^{n+2} + (n + 2)n2^{n+1} [n^2]$. Or $(n + 2)n2^{n+1} = n^2 2^{n+1} + n2^{n+2} \equiv n2^{n+2} [n^2]$. D'où $(n + 2)^{n+2} \equiv 2^{n+2}(1 + n) [n^2]$, ce qu'il fallait démontrer.

2. $7^4 = 2401 \equiv 1 [10]$. Posons $E = 7^{7^7}$. Comme $7 \equiv -1 [4]$ et 7^7 est impair, $E \equiv (-1)^{7^7} = -1 \equiv 3 [4] : E = 4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$. Donc $7^E = (7^4)^k 7^3 \equiv 343 \equiv 3 [10]$.