

Corrigé détaillé de la série — Chapitre 13

Dénombrement

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — méthode générale

Pour chaque question : 1) on identifie le type de tirage ; 2) on se demande si l'**ordre** compte et si les **répétitions** sont possibles ; 3) on applique le modèle : successif avec remise $\rightarrow n^p$; successif sans remise $\rightarrow A_n^p$; simultané $\rightarrow C_n^p$; on utilise le **principe multiplicatif** (« et ») et le **principe additif** pour des cas disjoints (« ou »), ou le **complémentaire** pour « au moins ». Tous les résultats ont été contrôlés par Python/sympy, par énumération exhaustive (build/verif_lot3.py).

Exercice 1

Le sac contient $4 + 3 + 1 = 8$ boules. Tirage successif sans remise de 3 boules : l'ordre compte, pas de répétition. Le nombre de tirages est $A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$.

Exercice 2

7 boules, tirage simultané : on compte des parties.

1. $C_7^3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3!} = 35$.

2. « exactement une rouge » = « une rouge **et** deux vertes » : $C_4^1 \times C_3^2 = 4 \times 3 = 12$.

3. Raisonnement par le complémentaire : le contraire de « au moins une verte » est « aucune verte », c'est-à-dire « trois rouges » : $C_4^3 = 4$ tirages. Donc $35 - 4 = 31$ tirages.

Exercice 3

Successif avec remise : 3-listes de l'ensemble des 8 boules : $8^3 = 512$.

Exercice 4

17 boules (5 N, 12 B).

1. Arbre : premier tirage N ou B, puis second tirage N ou B ; les quatre branches sont NN, NB, BN, BB. Nombre total (sans remise) : $A_{17}^2 = 17 \times 16 = 272$.

2. Même couleur = NN ou BB (cas disjoints) : $A_5^2 + A_{12}^2 = 20 + 132 = 152$.

3. Couleurs différentes = NB ou BN : $5 \times 12 + 12 \times 5 = 120$. Contrôle : $152 + 120 = 272$.

4. Avec remise : total $17^2 = 289$; même couleur : $5^2 + 12^2 = 169$; couleurs différentes : $2 \times 5 \times 12 = 120$ (contrôle : $169 + 120 = 289$).

Exercice 5

Mots de 3 lettres distinctes, l'ordre compte : $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$.

Exercice 6

Les voitures sont distinctes et chacune occupe une place différente : l'ordre compte, pas de répétition.

1. 7 façons. 2. $A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$. 3. $7! = 5040$.

Exercice 7

1. On associe à chaque personne une chaise, deux personnes n'ayant pas la même chaise : $A_{12}^6 = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 665\,280$.
2. C'est une permutation des 12 chaises : $12! = 479\,001\,600$.

Exercice 8

Un groupe est une partie à 3 élèves parmi 10 : l'ordre ne compte pas.

1. $C_{10}^3 = 120$. 2. $C_6^3 = 20$. 3. Deux filles et un garçon : $C_4^2 \times C_6^1 = 6 \times 6 = 36$.
4. Complémentaire : « aucun garçon » = « trois filles » : $C_4^3 = 4$. Donc $120 - 4 = 116$.
5. « au plus une fille » = « zéro fille » ou « une fille » (cas disjoints) : $C_6^3 + C_4^1 C_6^2 = 20 + 60 = 80$.

Exercice 9

1. L'ordre compte, chiffres distincts : $A_6^3 = 120$.
2. Un code est pair si et seulement si son dernier chiffre est pair, donc égal à 4 ou 8 : 2 choix pour le dernier chiffre et 6 choix pour chacun des trois autres : $6^3 \times 2 = 432$.
3. Dernier chiffre : 2 choix (4 ou 8) ; puis les deux premiers chiffres, distincts entre eux et du dernier, parmi les 5 restants : $A_5^2 = 20$. Total : $2 \times 20 = 40$.

Exercice 10

Principe multiplicatif : $3 \times 2 \times 3 = 18$ tenues.

Exercice 11

$2 \times 3 = 6$ repas.

Exercice 12

13 boules (6 B, 3 R, 4 N), tirage simultané.

1. $C_{13}^3 = 286$.
2.
 - $A : C_6^1 C_3^1 C_4^1 = 72$.
 - $B : C_6^2 C_4^1 = 15 \times 4 = 60$.
 - $C : C_4^3 = 4$. $D : C_6^3 = 20$.
 - E : une rouge et deux non rouges : $C_3^1 C_{10}^2 = 3 \times 45 = 135$.
 - F : trois non rouges : $C_{10}^3 = 120$. G est le contraire de F : $286 - 120 = 166$.
 - H : deux blanches et une non blanche, ou trois blanches : $C_6^2 C_7^1 + C_6^3 = 105 + 20 = 125$.
 - I est le contraire de D : $286 - 20 = 266$.
 - K : trois B ou trois R ou trois N : $20 + 1 + 4 = 25$.
 - L : on retire les tirages unicolores (K) et tricolores (A) : $286 - 25 - 72 = 189$.
 - M est le contraire de K : $286 - 25 = 261$.
 - $N : C_4^2 C_9^1 = 6 \times 9 = 54$.
 - R : on utilise $\text{Card}(\overline{X} \cup \overline{Y}) = \text{Card } \overline{X} + \text{Card } \overline{Y} - \text{Card}(\overline{X} \cap \overline{Y})$ avec X « au moins une blanche », Y « au moins une noire ». Sans blanche : $C_7^3 = 35$; sans noire : $C_9^3 = 84$; ni blanche ni noire : $C_3^3 = 1$. Donc $\text{Card } R = 286 - (35 + 84 - 1) = 168$.
 - S est le contraire de A : $286 - 72 = 214$.

Exercice 13

Un podium est une liste ordonnée de 3 athlètes distincts : $A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6840$.

Exercice 14

1. Avec remise : $5^3 = 125$. 2. Sans remise : $A_5^3 = 60$.

Exercice 15

À chaque patient on associe une chaise, deux patients ayant des chaises différentes : $A_{10}^4 = 5040$.

Exercice 16

1. Une distribution est une application de l'ensemble des 4 romans dans l'ensemble des 4 lecteurs : $4^4 = 256$.
2. Les 6 lettres de « MAISON » sont distinctes : $6! = 720$ mots.
3. Un résultat est une permutation de $\{1; \dots; n\}$: $n!$ résultats.

Exercice 17

« ANANAS » : 6 lettres dont A trois fois, N deux fois, S une fois : $\frac{6!}{3!2!1!} = 60$.

« CELLULE » : 7 lettres dont L trois fois, E deux fois, C et U une fois : $\frac{7!}{3!2!} = 420$.

Exercice 18

1. D'après la formule du binôme, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$.

— $S_1 = f(1) = 2^n$.

— $S_2 = f(-1) = 0^n = 0$ (car $n \geq 1$).

— f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (Ch. 11) : d'une part $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$, d'autre part $f'(x) = \sum_{k=1}^n k C_n^k x^{k-1}$. Pour $x = 1$: $S_3 = \sum_{k=0}^n k C_n^k = f'(1) = n 2^{n-1}$.

2. Par linéarité : $S_4 = S_3 + S_1 = n 2^{n-1} + 2^n = (n+2) 2^{n-1}$.

Exercice 19

Les 8 lettres de « PORTABLE » sont distinctes.

1. $8! = 40\,320$. 2. La dernière lettre est imposée, on permute les 7 autres : $7! = 5040$.

3. On colle le bloc « TA », qu'on traite comme une seule lettre : on permute 7 objets : $7! = 5040$.

4. Complémentaire : $8! - 7! = 40\,320 - 5040 = 35\,280$.

5. Si P et L sont séparées par exactement deux lettres, leurs positions sont i et $i+3$ avec $1 \leq i \leq 5$: 5 paires de positions, 2 ordres (P avant L ou L avant P), puis $6!$ façons de placer les 6 autres lettres : $5 \times 2 \times 720 = 7200$.

Exercice 20

1. $C_{18}^5 = 8568$. 2. Ilias est choisi ; on complète avec 4 élèves parmi les 17 autres : $C_{17}^4 = 2380$.

3. Complémentaire : équipes contenant Ilias et Rabab : $C_{16}^3 = 560$. Donc $8568 - 560 = 8008$.

4. 5 élèves parmi les 16 autres : $C_{16}^5 = 4368$.

Exercice 21

1. Principe multiplicatif : $C_4^2 \times C_4^1 = 6 \times 4 = 24$.

2. a. Trois noires est impossible (U ne contient qu'une noire). Trois rouges : $C_3^2 \times C_2^1 = 3 \times 2 = 6$. Donc 6 résultats.

2. b. Cas 1 : deux rouges de U et une noire de V : $C_3^2 \times 2 = 6$. Cas 2 : une rouge et la noire de U , une rouge de V : $3 \times 1 \times 2 = 6$. Les cas sont disjoints : $6 + 6 = 12$.

Exercice 22

-
- 1. a.** Raisonnement direct. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > 12$. Alors $n > 12 > 0 \implies 0 < \frac{12}{n} < 1 \implies E\left(\frac{12}{n}\right) = 0$.
- 1. b.** Pour $n \in \{1; \dots; 12\}$, $E\left(\frac{12}{n}\right)$ prend les valeurs 12, 6, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1 et, d'après a., la valeur 0 pour $n > 12$. L'ensemble est donc $\{0; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}$, de cardinal 7.
- 2.** L'application $\varphi : \{0; 1; \dots; n\} \rightarrow E_n$, $p \mapsto (p; n-p)$ est bien définie (si $0 \leq p \leq n$, alors $n-p \in \mathbb{N}$) et bijective : si $(p; q) \in E_n$, alors $p \leq n$ et $q = n-p$, donc $(p; q) = \varphi(p)$, et p est unique. Ainsi $\text{Card}(E_n) = n + 1$.