

Corrigé détaillé de la série — Chapitre 12

Étude de fonctions

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — méthodes utilisées

- **Asymptotes** : $\lim_a f = \pm\infty$ donne $x = a$; $\lim_{\pm\infty} f = b$ donne $y = b$; $\lim_{\pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ donne $y = ax + b$.
- **Branches paraboliques** (quand $\lim f = \pm\infty$) : on calcule $\lim \frac{f(x)}{x}$, puis éventuellement $\lim (f(x) - ax)$.
- **Position relative** : signe de $f(x) - (ax + b)$; **concavité** : signe de f'' ; **symétries** : $f(2a - x) = 2b - f(x)$ ou $f(2a - x) = f(x)$.
- Tous les résultats ont été contrôlés avec Python/sympy (`build/verif_lot2.py`) ; les courbes sont tracées à partir des expressions exactes.

Exercice 1

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$. En $\pm\infty$: $f(x) \sim \frac{x^4}{x^2} = x^2$, donc $\lim_{\pm\infty} f = +\infty$ (et $\frac{f(x)}{x} \rightarrow \pm\infty$: branches paraboliques de direction (Oy)). En 3 : le numérateur tend vers 81 et $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) \rightarrow 0^+$ si $x \rightarrow 3^+$, 0^- si $x \rightarrow 3^-$: $\lim_{3^+} f = +\infty$, $\lim_{3^-} f = -\infty$. En -3 : $x^2 - 9 \rightarrow 0^+$ si $x \rightarrow -3^-$ et 0^- si $x \rightarrow -3^+$: $\lim_{-3^-} f = +\infty$, $\lim_{-3^+} f = -\infty$. **Interprétation** : les droites $x = 3$ et $x = -3$ sont asymptotes verticales.
2. $D_f = \mathbb{R}^*$. $\lim_{\pm\infty} \frac{x+2}{x^2} = \lim_{\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$: asymptote horizontale $y = 0$ au voisinage de $\pm\infty$. En 0 : numérateur $\rightarrow 2$, $x^2 \rightarrow 0^+$: $\lim_{0^+} f = +\infty$: asymptote verticale $x = 0$.
3. $D_f =]2; +\infty[$. $\lim_{2^+} f$: forme $\frac{-1}{0^+}$, donc $-\infty$: asymptote verticale $x = 2$. En $+\infty$: $f(x) = \sqrt{x-2} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} \rightarrow +\infty$ (branche infinie étudiée à l'exercice 5 : $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$, direction (Ox)).
4. $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$. $\lim_{\pm\infty} f = \frac{3}{1} = 3$: asymptote horizontale $y = 3$. En 3 : numérateur $\rightarrow 27$; $(x - 3)(x + 2) \rightarrow 0^\pm$ quand $x \rightarrow 3^\pm$: $\lim_{3^+} f = +\infty$, $\lim_{3^-} f = -\infty$. En -2 : numérateur $\rightarrow 12$; $(x - 3)(x + 2) \rightarrow 0^+$ si $x \rightarrow -2^-$ (deux facteurs négatifs) et 0^- si $x \rightarrow -2^+$: $\lim_{-2^-} f = +\infty$, $\lim_{-2^+} f = -\infty$. Asymptotes verticales $x = 3$ et $x = -2$.
5. $D_f = \mathbb{R}^*$. Pour $x \neq 0$: $\sqrt{x^2 + 4} = |x|\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}$, donc $f(x) = \frac{|x|}{x}\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}$: $\lim_{+\infty} f = 1$ et $\lim_{-\infty} f = -1$: asymptotes horizontales $y = 1$ (en $+\infty$) et $y = -1$ (en $-\infty$). En 0 : forme $\frac{2}{0^\pm}$: $\lim_{0^+} f = +\infty$, $\lim_{0^-} f = -\infty$: asymptote verticale $x = 0$.
6. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$. $\lim_{\pm\infty} f = 2$: asymptote $y = 2$. En -4 : numérateur $\rightarrow -9$; $\lim_{-4^+} f = -\infty$, $\lim_{-4^-} f = +\infty$: asymptote verticale $x = -4$.

Exercice 2

1. La courbe n'a pas de point d'abscisse -2 ni 2 : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\} =]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$.
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$.
3. La droite $y = 1$ est asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$; les droites $x = -2$ et $x = 2$ sont asymptotes verticales.

Exercice 3

1. $f(x) - (x - 2) = \frac{3}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$: (D) : $y = x - 2$ est asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.
2. $f(x) - (3x - 1) = \frac{2}{x+3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$: (D) : $y = 3x - 1$ est asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

Exercice 4

On écrit $f(x) = ax + b + r(x)$ avec $\lim_{+\infty} r(x) = 0$ (division euclidienne), ou on calcule $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$.

- $3x^2 - x + 2 = (x - 1)(3x + 2) + 4$, donc $f(x) = 3x + 2 + \frac{4}{x-1}$: asymptote $y = 3x + 2$.
- $2x^2 = (3 - x)(-2x - 6) + 18$, donc $f(x) = -2x - 6 + \frac{18}{3-x}$: asymptote $y = -2x - 6$.
- $4x^2 - 3x + 2 = (2x + 1)\left(2x - \frac{5}{2}\right) + \frac{9}{2}$, donc $f(x) = 2x - \frac{5}{2} + \frac{9}{2(2x+1)}$: asymptote $y = 2x - \frac{5}{2}$.
- $x^3 = (x + 1)^2(x - 2) + 3x + 2$, donc $f(x) = x - 2 + \frac{3x+2}{(x+1)^2}$ et $\frac{3x+2}{(x+1)^2} \rightarrow 0$: asymptote $y = x - 2$.
- $f(x) = 1 - x + 2x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2x} = x + \frac{3}{2} + \frac{3}{2x}$: asymptote $y = x + \frac{3}{2}$.
- Pour $x > 0$: $\frac{f(x)}{x} = \sqrt{1 + \frac{4}{x}} \rightarrow 1 = a$; $f(x) - x = \frac{4x}{\sqrt{x^2+4x+x}} = \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+1}} \rightarrow 2 = b$: asymptote $y = x + 2$.

Exercice 5

- $\lim f = -\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = -2x^2 + x \rightarrow -\infty$: branche parabolique de direction (Oy) .
- $\lim f = +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = x - 3 + \frac{5}{x} \rightarrow +\infty$: direction (Oy) .
- $\frac{x\sqrt{x}}{x+1} = \sqrt{x} \cdot \frac{x}{x+1} \rightarrow +\infty$, donc $\lim f = +\infty$; $\frac{f(x)}{x} = 3 - \frac{2}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x+1} \rightarrow 3$; $f(x) - 3x = -2 + \frac{x\sqrt{x}}{x+1} \rightarrow +\infty$: branche parabolique de direction la droite $y = 3x$.
- $\lim f = +\infty$; $\frac{f(x)}{x} = 1 + \sqrt{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \rightarrow 1$; $f(x) - x = \sqrt{2x+1} \rightarrow +\infty$: direction $y = x$.
- $\frac{f(x)}{x} = 4 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} \rightarrow 4$; $f(x) - 4x = \sqrt{x} + \sqrt{x+3} \rightarrow +\infty$: direction $y = 4x$.
- $f(x) = x\left(-2 + \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}}\right) \rightarrow -\infty$; $\frac{f(x)}{x} \rightarrow -2$; $f(x) + 2x = 1 + \sqrt{x+5} \rightarrow +\infty$: direction $y = -2x$.
- $\lim f = +\infty$; $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} \rightarrow 0$: direction (Ox) .
- $\lim f = +\infty$; $\frac{f(x)}{x} = \sqrt{x^2 + x + 1} \rightarrow +\infty$: direction (Oy) .

Exercice 6

- $2x + 1 \neq 0 \iff x \neq -\frac{1}{2}$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.
- a.** $\lim_{\pm\infty} f = \lim_{\pm\infty} \frac{2x^2}{2x} = \lim_{\pm\infty} x = \pm\infty$. En $-\frac{1}{2}$: numérateur $\rightarrow \frac{1}{2}$, $2x + 1 \rightarrow 0^\pm$ quand $x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^\pm$: $\lim_{(-\frac{1}{2})^+} f = +\infty$, $\lim_{(-\frac{1}{2})^-} f = -\infty$.
- b.** La droite $x = -\frac{1}{2}$ est asymptote verticale.
- a.** $x - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x+2} = \frac{(x-\frac{1}{2})(4x+2)+1}{4x+2} = \frac{4x^2+2x-2x-1+1}{4x+2} = \frac{4x^2}{4x+2} = \frac{2x^2}{2x+1} = f(x)$.
- b. Méthode 1** : $f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4x+2} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$. **Méthode 2** : $\frac{f(x)}{x} = \frac{2x}{2x+1} \rightarrow 1$ et $f(x) - x = \frac{-x}{2x+1} \rightarrow -\frac{1}{2}$. Dans les deux cas, (D) : $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique au voisinage de $\pm\infty$.
- $\frac{1}{4x+2} > 0 \iff x > -\frac{1}{2}$: $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de (D) sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et au-dessous sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$.
- Soit $x \in D_f$: $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - x = -1 - x$ et $-1 - x = -\frac{1}{2} \iff x = -\frac{1}{2}$, donc $-1 - x \in D_f$. De plus

$$f(-1-x) = -1-x - \frac{1}{2} + \frac{1}{-4-4x+2} = -x - \frac{3}{2} - \frac{1}{4x+2}$$

et

$$2 \times (-1) - f(x) = -2 - x + \frac{1}{2} - \frac{1}{4x+2} = -x - \frac{3}{2} - \frac{1}{4x+2}.$$

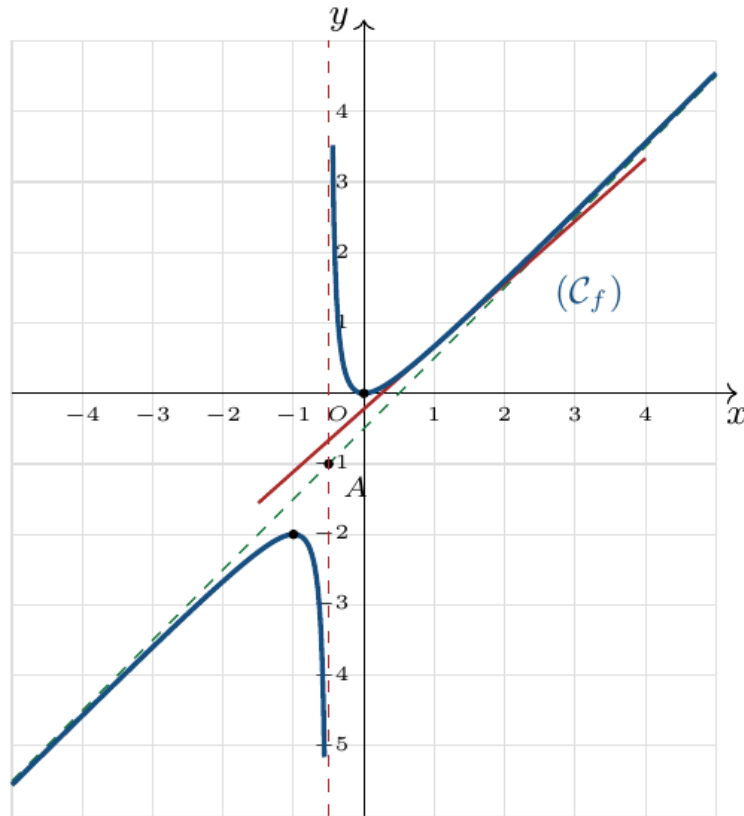
Donc $f(-1-x) = -2 - f(x)$: $A\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$ est centre de symétrie.

- a.** $f'(x) = 1 - \frac{4}{(4x+2)^2} = 1 - \frac{1}{(2x+1)^2} = \frac{(2x+1)^2-1}{(2x+1)^2} = \frac{4x^2+4x}{(2x+1)^2} = \frac{4x(x+1)}{(2x+1)^2}$.
- b.** $f(-1) = -2$, $f(0) = 0$.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

6. $f(1) = \frac{2}{3}$, $f'(1) = \frac{8}{9}$: (T) : $y = \frac{8}{9}(x-1) + \frac{2}{3} = \frac{8}{9}x - \frac{2}{9}$.

7. Construction (asymptotes en pointillés, (T) en rouge) :



8. Les solutions de $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec la droite $y = m$. D'après le tableau : si $m < -2$: deux solutions (une dans $] -\infty; -1[$, une dans $] -1; -\frac{1}{2}[$) ; si $m = -2$: une solution ($x = -1$) ; si $-2 < m < 0$: aucune solution ; si $m = 0$: une solution ($x = 0$) ; si $m > 0$: deux solutions (une dans $] -\frac{1}{2}; 0[$, une dans $] 0; +\infty[$).

Exercice 7

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

2. a. $\lim_{\pm\infty} f = \lim_{\pm\infty} \frac{x^2}{2x} = \pm\infty$. En 3 : numérateur $\rightarrow 4$; $\lim_{3+} f = +\infty$, $\lim_{3-} f = -\infty$.

b. Asymptote verticale $x = 3$.

3. a. $\left(\frac{1}{2}x + 1\right) \cdot 2(x-3) + 4 = (x+2)(x-3) + 4 = x^2 - x - 2$, donc $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{4}{2(x-3)} = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{2}{x-3}$.

b. $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{2}{x-3} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$: (D) est asymptote oblique au voisinage de $\pm\infty$.

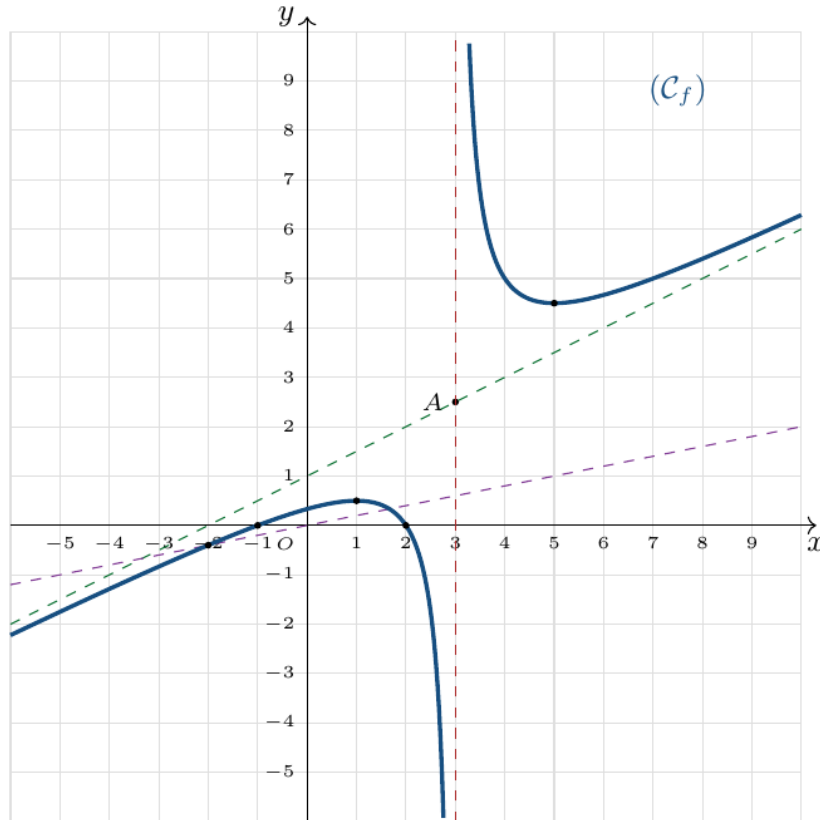
c. $\frac{2}{x-3} > 0 \iff x > 3$: (C_f) est au-dessus de (D) sur $]3; +\infty[$, au-dessous sur $] -\infty; 3[$.

4. a. $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{(x-3)^2} = \frac{(x-3)^2 - 4}{2(x-3)^2} = \frac{(x-5)(x-1)}{2(x-3)^2}$.

b. $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(5) = \frac{9}{2}$.

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

5. $f''(x) = (-2(x-3)^{-2})' = \frac{4}{(x-3)^3} : f'' < 0$ sur $] -\infty; 3[$ ($(\mathcal{C}_f)$ concave) et $f'' > 0$ sur $]3; +\infty[$ (convexe). Il n'y a pas de point d'inflexion ($3 \notin D_f$).
6. Si $x \neq 3$ alors $6-x \neq 3$. $f(6-x) = 3 - \frac{x}{2} + 1 + \frac{2}{3-x} = 4 - \frac{x}{2} - \frac{2}{x-3}$ et $5-f(x) = 5 - \frac{x}{2} - 1 - \frac{2}{x-3} = 4 - \frac{x}{2} - \frac{2}{x-3}$. Donc $f(6-x) = 2 \times \frac{5}{2} - f(x) : A\left(3; \frac{5}{2}\right)$ est centre de symétrie.
7. Axe $(Ox) : f(x) = 0 \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff x = -1$ ou $x = 2$: points $(-1; 0)$ et $(2; 0)$. Axe $(Oy) : f(0) = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$: point $\left(0; \frac{1}{3}\right)$.
8. Construction (en violet, la droite (Δ) de la question 9) :



9. a. $f(-2) = \frac{4}{-10} = -\frac{2}{5} = \frac{1}{5} \times (-2)$ et $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{-8}{-9} = \frac{1}{3} = \frac{1}{5} \times \frac{5}{3} : (\Delta)$ coupe $(\mathcal{C}_f)$ aux points d'abscisses -2 et $\frac{5}{3}$.
- b. Graphiquement, $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de (Δ) pour $x \leq -2$ et pour $\frac{5}{3} \leq x < 3$. (Contrôle algébrique : $f(x) - \frac{x}{5} = \frac{(x+2)(3x-5)}{10(x-3)}$.) Donc l'ensemble des solutions : $S =]-\infty; -2] \cup \left[\frac{5}{3}; 3\right[$.

Exercice 8

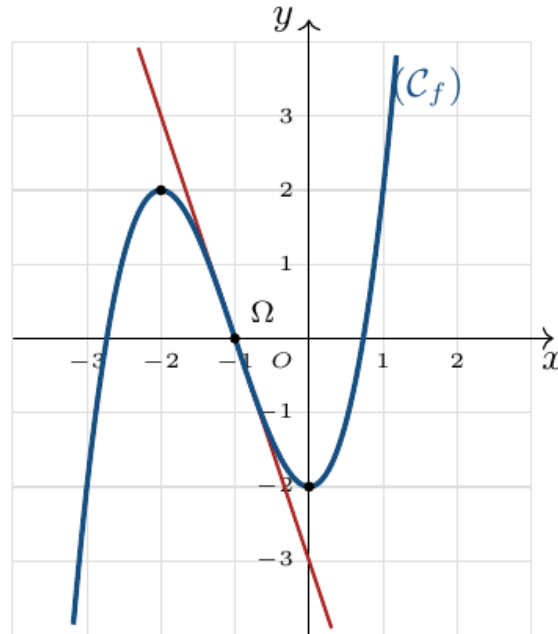
1. $\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} x^3 = +\infty$; $\lim_{-\infty} f = -\infty$.
2. $\frac{f(x)}{x} = x^2 + 3x - \frac{2}{x} \rightarrow +\infty$ en $\pm\infty$: branches paraboliques de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
3. $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$; $f(-2) = 2$, $f(0) = -2$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

4. $f''(x) = 6x + 6 = 6(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
$(\mathcal{C}_f)$		concave	$\Omega(-1; 0)$	convexe	

- f'' s'annule uniquement en -1 , en changeant de signe : $\Omega(-1; f(-1)) = \Omega(-1; 0)$ est l'unique point d'inflexion.
5. Pour $x \in \mathbb{R} : -2 - x \in \mathbb{R}$ et $f(-2 - x) = -(x+2)^3 + 3(x+2)^2 - 2 = -x^3 - 3x^2 + 2 = -f(x) = 2 \times 0 - f(x) : \Omega$ est centre de symétrie.
6. $f'(-1) = -3 : (T) : y = -3(x+1) = -3x - 3$.
7. $f(x) = (x+1)(x^2 + 2x - 2)$ s'annule en -1 et $-1 \pm \sqrt{3}$.

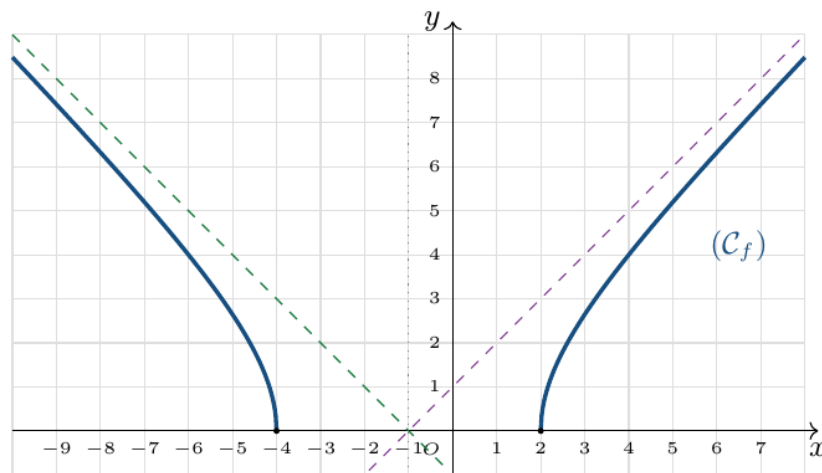


Exercice 9

1. $x^2 + 2x - 8 = (x+4)(x-2) \geq 0 \iff x \in]-\infty; -4] \cup [2; +\infty[= D_f$.
2. Soit $x \in D_f : (-2-x+4)(-2-x-2) = (2-x)(-x-4) = (x-2)(x+4) \geq 0$, donc $-2-x \in D_f$ et $f(-2-x) = \sqrt{(x-2)(x+4)} = f(x)$. La droite $x = -1$ est axe de symétrie.
3. a. $x^2 + 2x - 8 \rightarrow +\infty$ en $\pm\infty$, donc $\lim_{\pm\infty} f = +\infty$.
- b. Expression conjuguée : $f(x) - (x+1) = \frac{x^2+2x-8-(x+1)^2}{f(x)+x+1} = \frac{-9}{f(x)+x+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$; et $f(x)+x+1 = f(x) - (-x-1) = \frac{-9}{f(x)-x-1} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ (car $f(x) \rightarrow +\infty$ et $-x-1 \rightarrow +\infty$).
- c. $(D) : y = -x - 1$ est asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ et $(D') : y = x + 1$ au voisinage de $+\infty$.
4. a. Si $x \leq -4 : x+4 \leq 0$ et $x-2 < 0$, donc $-(x+4) \geq 0$, $-(x-2) > 0$ et $(x+4)(x-2) = (-x-4)(-x-2)$, d'où $f(x) = \sqrt{-(x+4)}\sqrt{-(x-2)}$. Si $x \geq 2$: les deux facteurs sont positifs, $f(x) = \sqrt{x+4}\sqrt{x-2}$.
- b. À gauche en -4 : pour $x < -4$, $\frac{f(x)-f(-4)}{x+4} = \frac{\sqrt{-(x+4)}\sqrt{2-x}}{-(-(x+4))} = -\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{-(x+4)}} \rightarrow -\infty$ (forme $\frac{-\sqrt{6}}{0^+}$) : f n'est pas dérivable à gauche en -4 ; demi-tangente verticale (dirigée vers le haut) au point $(-4; 0)$. À droite en 2 : $\frac{f(x)}{x-2} = \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-2}} \rightarrow +\infty$: non dérivable à droite en 2 ; demi-tangente verticale (vers le haut) au point $(2; 0)$.
5. a. Sur $] -\infty; -4[\cup] 2; +\infty[$, $x^2 + 2x - 8 > 0 : f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x-8}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-8}}$.
- b. $f' < 0$ sur $] -\infty; -4[$ ($x+1 < 0$) et $f' > 0$ sur $] 2; +\infty[$.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	(non défini)	0	$\nearrow$	$+\infty$

6.



Exercice 10

1. $\sin x = 0 \iff x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Pour $x \neq k\pi$, $f(x)$ est donné par la formule ; pour $x = (2k+1)\pi$, $f(x) = 0$; pour $x = 2k\pi$, $f(x)$ n'est pas défini. Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2. $x \in D_f \iff -x \in D_f$. Si $x \neq k\pi$: $f(-x) = \frac{1+\cos x}{-\sin x} = -f(x)$. Si $x = (2k+1)\pi$: $-x = (2(-k-1)+1)\pi$ et $f(-x) = 0 = -f(x)$. Donc f est impaire.

3. $x \in D_f \iff x + 2\pi \in D_f$ et, $\cos$ et $\sin$ étant 2π -périodiques, $f(x + 2\pi) = f(x)$ (y compris aux points $(2k+1)\pi$). f est périodique de période 2π .

4. Par périodicité, il suffit d'étudier f sur $] -\pi; \pi] \setminus \{0\}$ (intervalle de longueur 2π) ; par imparité (symétrie de centre O), il suffit de l'étudier sur $]0; \pi]$: $D_E =]0; \pi]$.

5. Pour x voisin de π , $x \neq \pi$: $\frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{\sin x(1-\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)} = \frac{\sin x}{1-\cos x} \rightarrow \frac{0}{2} = 0 = f(\pi)$.

6. Quand $x \rightarrow 0^+$: $1 + \cos x \rightarrow 2$ et $\sin x \rightarrow 0^+$: $\lim_{0^+} f = +\infty$. La droite $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale ; par périodicité, les droites $x = 2k\pi$ le sont aussi.

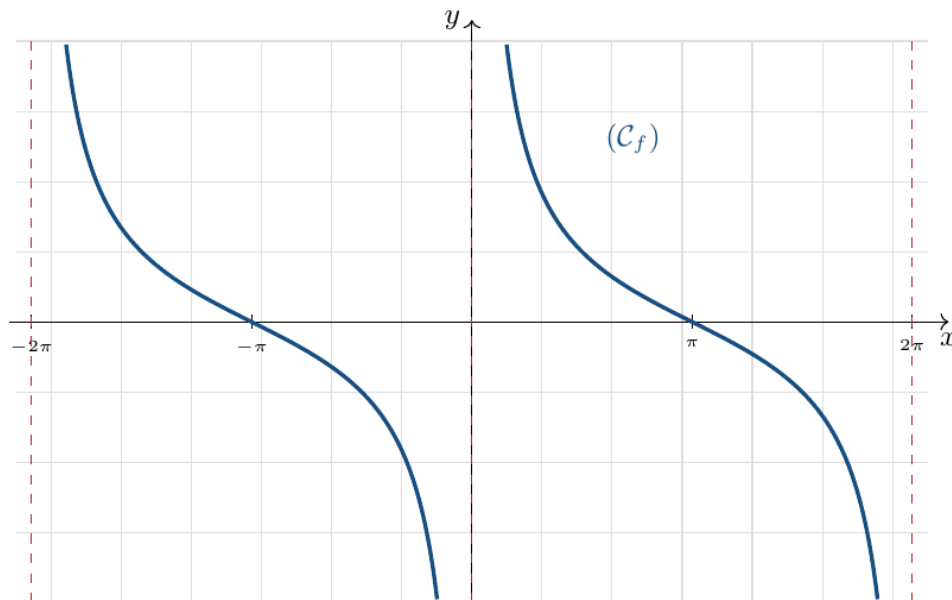
7. a. Pour $x \in]0; \pi[$:

$$f'(x) = \frac{-\sin x \sin x - (1 + \cos x) \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x) - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \frac{-1}{1 - \cos x}.$$

b. $f'(x) < 0$ sur $]0; \pi[$: f est strictement décroissante sur $]0; \pi]$, de $+\infty$ à $f(\pi) = 0$ (on peut vérifier que $f'(\pi) = -\frac{1}{2}$).

x	0		π
$f'(x)$	$\parallel$	$-$	
$f(x)$	$\parallel +\infty$	$\searrow$	0

8. On trace sur $]0; \pi]$, on complète par symétrie de centre O sur $[-\pi; 0[$, puis par translation de vecteur $\pm 2\pi \vec{i}$:



Exercice 11

1. $D_f = \mathbb{R}$; $\lim_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

2. (Δ) : $y = -x$ étant asymptote au voisinage de $-\infty$: $\lim_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ et $\lim_{-\infty} (f(x) + x) = 0$. La branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$ donne $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

3. Lecture : $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(4) = 0$.

x	$-\infty$		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. $f'(1) = 0$ (tangente horizontale); $f'_g(2) = 3$ et $f'_d(2) = -2$ (demi-tangentes); comme $f(4) = 0$: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x-4} = f'(4) = 0$.

5. La courbe est au-dessus de ses tangentes sur $] -\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		+		+	
(C_f)		convexe		convexe	

Il n'y a pas de point d'inflexion (en 2, la courbe n'a pas de tangente).

6. (T) passe par $A(-1; 2)$ et par le point $(3; -1)$: coefficient directeur $\frac{-1-2}{3+1} = -\frac{3}{4}$, donc $f'(-1) = -\frac{3}{4}$ et (T) : $y = -\frac{3}{4}(x+1) + 2 = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$.

7. On compte les points d'intersection de (C_f) et de la droite $y = m$ (avec $f(-1) = 2$ et $f(6) = 2$) :

m	$m < 0$	$m = 0$	$0 < m < 1$	$m = 1$	$1 < m < 2$	$m = 2$	$m > 2$
nombre de solutions	0	1	2	3	4	3	2

(Par exemple, pour $m = 2$: $x = -1$, $x = 2$ et $x = 6$.)

Exercice 12

1. $\lim_{+\infty} \left(\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} - 5 \right) = +\infty$; $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x\sqrt{x}} - \frac{5}{x} \rightarrow 0$: branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

2. Pour $x < 1$: $x^2 - x = (x-2)(x+1) + 2$, donc $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x-2}$. $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $f(x) - (x+1) = \frac{2}{x-2} \rightarrow 0$: la droite (D) : $y = x + 1$ est asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

3. Sur $] -\infty; 1[$, $x - 2 < 0$, donc $f(x) - (x+1) < 0$: $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de (D) .

4. $f(1) = 1 + 4 - 5 = 0$.

— À droite : pour $x > 1$, $\frac{f(x)}{x-1} = \frac{x-5\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}(x-1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-4)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \rightarrow -\frac{3}{2}$: $f'_d(1) = -\frac{3}{2}$.

— À gauche : $\frac{f(x)}{x-1} = \frac{x(x-1)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x}{x-2} \rightarrow -1$: $f'_g(1) = -1$.

$f'_d(1) \neq f'_g(1)$: f n'est pas dérivable en 1 ; le point $(1; 0)$ est un point anguleux (demi-tangentes $y = -\frac{3}{2}(x-1)$, $x \geq 1$, et $y = -(x-1)$, $x \leq 1$).

5. Pour $x > 1$: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{4}{2x\sqrt{x}} = \frac{x-4}{2x\sqrt{x}}$. Pour $x < 1$: $f'(x) = 1 - \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2-2}{(x-2)^2}$.

6. Sur $] -\infty; 1[$: $(x-2)^2 - 2 = (x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})$; comme $x-2-\sqrt{2} < 0$, $f'(x)$ a le signe contraire de $x-(2-\sqrt{2})$. $f(2-\sqrt{2}) = 3-2\sqrt{2}$. Sur $]1; +\infty[$: signe de $x-4$; $f(4) = -1$.

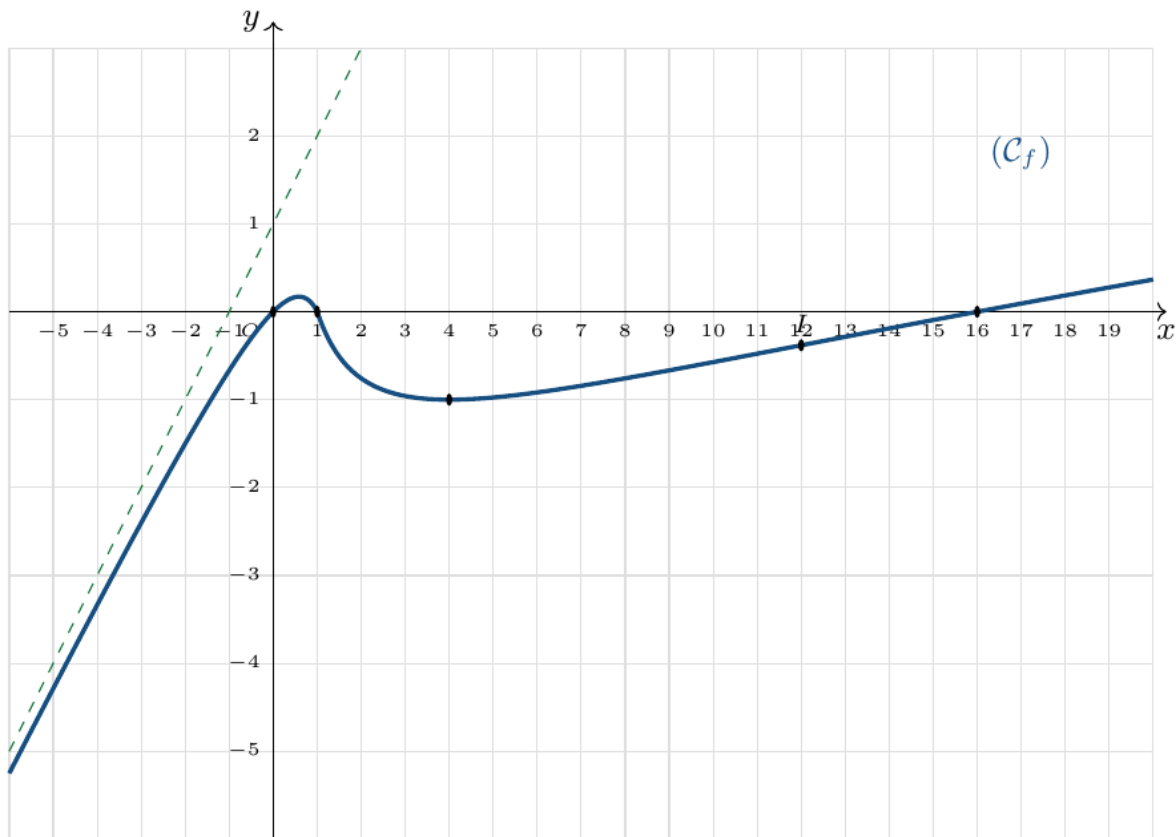
x	$-\infty$		$2-\sqrt{2}$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$3-2\sqrt{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

7. Pour $x > 1$, on écrit $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x\sqrt{x}}$; or $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ et $\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)' = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$, donc $f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2\sqrt{x}} = \frac{-x+12}{4x^2\sqrt{x}}$. Pour $x < 1$: $f'(x) = 1 - 2(x-2)^{-2}$, donc $f''(x) = 4(x-2)^{-3} = \frac{4}{(x-2)^3}$.

8. Sur $] -\infty; 1[$: $f'' < 0$, $(\mathcal{C}_f)$ concave. Sur $]1; 12[$: $f'' > 0$, convexe ; sur $]12; +\infty[$: $f'' < 0$, concave. f'' s'annule en 12 en changeant de signe : $I\left(12; \frac{8\sqrt{3}}{3} - 5\right)$ est un point d'inflexion. En 1, la courbe change aussi de concavité mais n'y admet pas de tangente (point anguleux) : ce n'est pas un point d'inflexion. I est donc l'unique point d'inflexion.

9. $f(4) = 2 + 2 - 5 = -1$. Sur $] -\infty; 1[$: $f(x) = 0 \iff x(x-1) = 0 \iff x = 0$. Sur $]1; +\infty[$: $f(x) = 0 \iff x - 5\sqrt{x} + 4 = 0 \iff (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-4) = 0 \iff x = 1$ ou $x = 16$. Points d'intersection : $(0; 0)$, $(1; 0)$ et $(16; 0)$.

10. (Repère orthogonal : unité verticale double de l'unité horizontale.)



Exercice 13

- $x \in D_f \iff x + 2 \neq 0$ et $\frac{x}{x+2} \geq 0 \iff x \in]-\infty; -2[\cup [0; +\infty[$ (tableau de signe du quotient).
- $\frac{x}{x+2} \rightarrow 1$ en $\pm\infty$, donc $\sqrt{\frac{x}{x+2}} \rightarrow 1$: $\lim_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim_{-\infty} f = -\infty$.
- Quand $x \rightarrow -2^-$: $x \rightarrow -2$ et $x + 2 \rightarrow 0^-$, donc $\frac{x}{x+2} \rightarrow +\infty$ et $\sqrt{\frac{x}{x+2}} \rightarrow +\infty$; $\lim_{-2^-} f = -\infty$. La droite $x = -2$ est asymptote verticale.
- Pour $x > 0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \sqrt{\frac{x}{x+2}} \rightarrow 0$: f est dérivable à droite en 0, $f'_d(0) = 0$: demi-tangente horizontale à l'origine.
- a.** On pose $u(x) = \frac{x}{x+2}$ (> 0 sur $D_f \setminus \{0\}$), $u'(x) = \frac{2}{(x+2)^2}$. Alors $f'(x) = \sqrt{u} + x \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + \frac{x}{(x+2)^2\sqrt{u}}$. Or $x = u(x)(x+2)$, donc $\frac{x}{\sqrt{u}} = \sqrt{u}(x+2)$ et

$$f'(x) = \sqrt{u} \left(1 + \frac{1}{x+2} \right) = \frac{x+3}{x+2} \sqrt{\frac{x}{x+2}}.$$

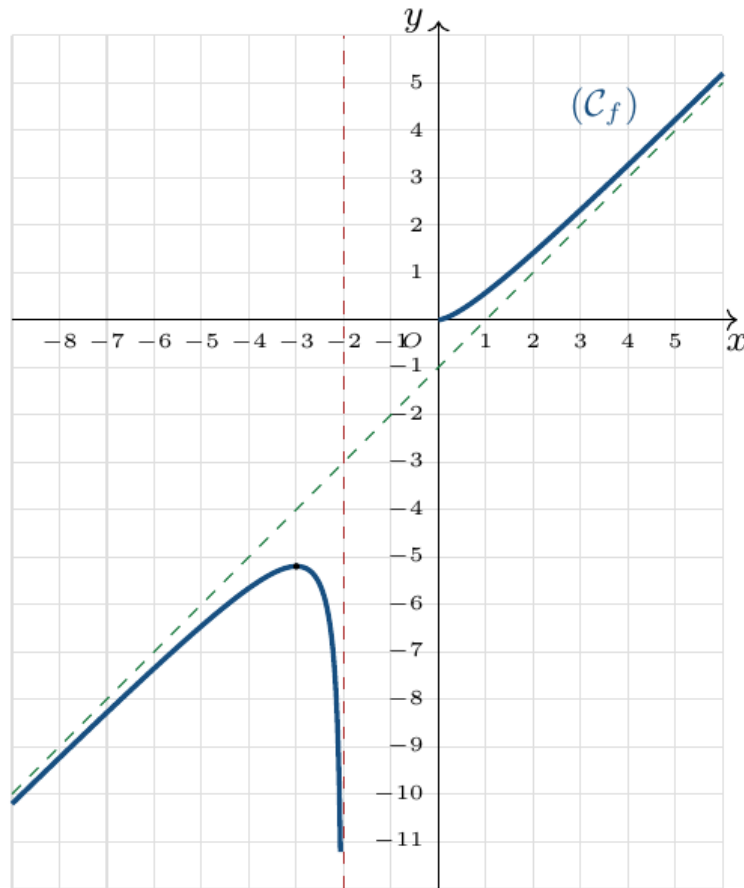
- f' a le signe de $\frac{x+3}{x+2}$: positif sur $] -\infty; -3[$, négatif sur $] -3; -2[$, positif sur $]0; +\infty[$. $f(-3) = -3\sqrt{3}$.

x	$-\infty$		-3		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-			0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-3\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$		0	$\nearrow$	$+\infty$

- a.** $f(x) - x = x(\sqrt{u} - 1) = \frac{x(u-1)}{\sqrt{u+1}}$ et $u - 1 = \frac{x-(x+2)}{x+2} = \frac{-2}{x+2}$, d'où $f(x) - x = \frac{-2x}{(x+2)(\sqrt{\frac{x}{x+2}} + 1)}$.

- En $\pm\infty$: $\frac{-2x}{x+2} \rightarrow -2$ et $\sqrt{u} + 1 \rightarrow 2$, donc $f(x) - x \rightarrow -1$, c'est-à-dire $f(x) - (x - 1) \rightarrow 0$: (D) : $y = x - 1$ est asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

7.



Exercice 14

1. $D_f = \mathbb{R}^*$, symétrique par rapport à 0, et $f(-x) = -x - \frac{\sqrt{x^2+2}}{-x} = -\left(x - \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\right) = -f(x)$: f est impaire.
2. Quand $x \rightarrow 0^+$: $\frac{\sqrt{x^2+2}}{x} \rightarrow +\infty$ (forme $\frac{\sqrt{2}}{0^+}$), donc $\lim_{0^+} f = -\infty$: l'axe des ordonnées ($x = 0$) est asymptote verticale (et, par imparité, $\lim_{0^-} f = +\infty$).
3. a. Pour $x > 0$: $f(x) - (x - 1) = 1 - \frac{\sqrt{x^2+2}}{x} = \frac{x - \sqrt{x^2+2}}{x} = \frac{x^2 - (x^2+2)}{x(x + \sqrt{x^2+2})} = \frac{-2}{x(x + \sqrt{x^2+2})}$.
- b. $\frac{\sqrt{x^2+2}}{x} = \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} \rightarrow 1$, donc $\lim_{+\infty} f = +\infty$; et $f(x) - (x - 1) \rightarrow 0$: (D) : $y = x - 1$ est asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ (par imparité, $y = x + 1$ l'est au voisinage de $-\infty$).
4. Sur $\mathbb{R}^{*+}$, $f(x) - (x - 1) < 0$: (C_f) est au-dessous de (D) .
5. a. $\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\right)' = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} \cdot x - \sqrt{x^2+2}}{x^2} = \frac{x^2 - (x^2+2)}{x^2\sqrt{x^2+2}} = \frac{-2}{x^2\sqrt{x^2+2}}$, donc $f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2\sqrt{x^2+2}}$.
- b. $f' > 0$ sur $\mathbb{R}^{*+}$; f étant impaire, f' est paire, donc $f' > 0$ aussi sur $\mathbb{R}^{*-}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

6. a. Pour $x > 0$: $f(x) = 0 \iff x^2 = \sqrt{x^2+2} \iff x^4 = x^2 + 2$ (les deux membres étant positifs) $\iff (x^2 - 2)(x^2 + 1) = 0 \iff x = \sqrt{2}$. Point d'intersection : $(\sqrt{2}; 0)$.
- b. $f'(\sqrt{2}) = 1 + \frac{2}{2 \times 2} = \frac{3}{2}$: (T) : $y = \frac{3}{2}(x - \sqrt{2})$.
7. $f'(x) = 1 + 2x^{-2}(x^2 + 2)^{-\frac{1}{2}}$, donc $f''(x) = -4x^{-3}(x^2 + 2)^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-1}(x^2 + 2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-2(3x^2+4)}{x^3(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$. Sur $\mathbb{R}^{*+}$, $f''(x) < 0$: (C_f) est concave sur $\mathbb{R}^{*+}$ (et convexe sur $\mathbb{R}^{*-}$ par symétrie).
- 8.

