

Corrigé détaillé de la série — Chapitre 11

Dérivation

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — méthodes utilisées

- **Dérivabilité en a** : on calcule $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$; si elle est réelle, c'est $f'(a)$. Pour une fonction définie par morceaux, on étudie séparément la dérivabilité à droite et à gauche.
- **Interprétation** : tangente $y = f'(a)(x-a) + f(a)$; point anguleux si $f'_d(a) \neq f'_g(a)$; demi-tangente verticale si la limite du taux d'accroissement est infinie.
- **Variations** : on factorise $f'(x)$ et on étudie son signe.
- Tous les résultats ont été contrôlés avec Python/sympy (build/verif_lot2.py).

Exercice 1

1. f est définie sur $\mathbb{R}$. Pour $x \neq 2$: $\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{3x-4-2}{x-2} = \frac{3(x-2)}{x-2} = 3$. Donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 3$.

Interprétation : $(\mathcal{C}_f)$ admet au point $A(2; 2)$ une tangente de coefficient directeur 3 : $y = 3(x-2) + 2 = 3x-4$ (c'est la droite elle-même).

2. $D_f = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et 5 est intérieur à D_f ; $f(5) = 3$. Pour $x \neq 5$ (conjuguée) :

$$\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5} = \frac{(2x-1)-9}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)} = \frac{2}{\sqrt{2x-1}+3} \xrightarrow{x \rightarrow 5} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

f est dérivable en 5, $f'(5) = \frac{1}{3}$; tangente en $A(5; 3)$: $y = \frac{1}{3}(x-5) + 3 = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

3. $f(0) = 1 - \cos 0 = 0$.

— À droite : $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1-\cos 2x}{x} = 4x \cdot \frac{1-\cos 2x}{(2x)^2} \rightarrow 0 \times \frac{1}{2} = 0$. Donc $f'_d(0) = 0$.

— À gauche : $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\sin 3x}{x} = 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \rightarrow 3$. Donc $f'_g(0) = 3$.

$f'_d(0) \neq f'_g(0)$: f n'est pas dérivable en 0. **Interprétation** : $O(0; 0)$ est un point anguleux de $(\mathcal{C}_f)$, avec les demi-tangentes $y = 0$ ($x \geq 0$) et $y = 3x$ ($x \leq 0$).

4. $\frac{x^3-(-2)^3}{x+2} = \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2} = x^2-2x+4 \rightarrow 12$. f est dérivable en -2 , $f'(-2) = 12$; tangente en $A(-2; -8)$: $y = 12(x+2) - 8 = 12x + 16$.

Exercice 2

1. Pour $x \neq 0$: $\frac{(1+x)^4-1}{x} = \frac{((1+x)^2-1)((1+x)^2+1)}{x} = (x+2)(x^2+2x+2) \rightarrow 2 \times 2 = 4$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 4$. L'approximation affine de f au voisinage de 0 est $x \mapsto f'(0)x + f(0) = 1 + 4x$; ainsi $(1+h)^4 \approx 1 + 4h$ pour h voisin de 0. Avec $h = 0,002$: $(1,002)^4 \approx 1,008$.

2. Soit $u(x) = \frac{1}{1+2x}$: $u(0) = 1$ et $\frac{u(x)-1}{x} = \frac{\frac{1}{1+2x}-1}{x} = \frac{-2x}{x(1+2x)} = \frac{-2}{1+2x} \rightarrow -2$, donc $u'(0) = -2$ et $\frac{1}{1+2h} \approx 1 - 2h$.

Soit $v(x) = \sqrt{1+4x}$: $\frac{v(x)-1}{x} = \frac{\sqrt{1+4x}-1}{x} = \frac{4x}{x(\sqrt{1+4x}+1)} \rightarrow \frac{4}{2} = 2$, donc $v'(0) = 2$ et $\sqrt{1+4h} \approx 1 + 2h$.

Exercice 3

1. Polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 4x^3 - 6x + 5$.

2. $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$: f est rationnelle, dérivable sur $] -\infty; -2[,] -2; 3[$ et $]3; +\infty[$. Avec $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$:

$$f'(x) = \frac{3(x^2-x-6) - (3x-1)(2x-1)}{(x^2-x-6)^2} = \frac{-3x^2+2x-19}{(x^2-x-6)^2}.$$

3. $u(x) = 2x + 6 > 0 \iff x > -3 : f$ est dérivable sur $] -3; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+6}} = \frac{1}{\sqrt{2x+6}}$.
4. $x^2 + 3 > 0 : f(x) = \frac{3x^2(x^2+3)-x^3 \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2(x^2+9)}{(x^2+3)^2}$.
5. $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $]0; +\infty[: f'(x) = \sqrt{x} + (x-1)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x+x-1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$ pour $x > 0$.
6. Sur $]0; +\infty[: \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$, donc $f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{3}{x^4}$.

Exercice 4

1. $f(3) = 4\sqrt{4} = 8$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 8 ; \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 9 - 15 + c = c - 6$. Donc $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \iff c - 6 = 8 \iff c = 14$.
2. Avec $c = 14$.

- À droite : $\frac{4\sqrt{x+1}-8}{x-3} = \frac{4(x+1-4)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{4}{\sqrt{x+1}+2} \rightarrow 1 : f'_d(3) = 1$.
- À gauche : $\frac{x^2-5x+14-8}{x-3} = \frac{(x-3)(x-2)}{x-3} = x-2 \rightarrow 1 : f'_g(3) = 1$.

$f'_d(3) = f'_g(3) = 1$, donc f est dérivable en 3 et $f'(3) = 1$. Ainsi $f'(x) = 2x-5$ si $x < 3$, $f'(3) = 1$ et $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ si $x > 3$.

Exercice 5

On reconnaît à chaque fois un taux d'accroissement $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ d'une fonction g dérivable en a ; la limite vaut $g'(a)$.

1. $g(x) = (x-2)^{2027}$, $g(1) = -1$: la limite vaut $g'(1) = 2027(1-2)^{2026} = 2027$.
2. $g(x) = x\sqrt{x+7}$, $g(2) = 6$, $g'(x) = \sqrt{x+7} + \frac{x}{2\sqrt{x+7}}$: la limite vaut $g'(2) = 3 + \frac{2}{6} = \frac{10}{3}$.
3. $g(x) = \frac{1}{x+3}$, $g(-1) = \frac{1}{2}$, $g'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2}$: la limite vaut $g'(-1) = -\frac{1}{4}$.
4. Pour x voisin de $\frac{\pi}{3}$, $x \neq \frac{\pi}{3}$: $\frac{2\cos x - 1}{\tan x - \sqrt{3}} = \frac{\frac{2\cos x - 2\cos \frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}}}{\frac{\tan x - \tan \frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}}}$. Le numérateur tend vers $-2\sin \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$, le dénominateur vers $1 + \tan^2 \frac{\pi}{3} = 4$. La limite vaut $-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Exercice 6

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x+1)(x-3) : f'(x) > 0$ sur $] -\infty; -1[\cup]3; +\infty[$, $f'(x) < 0$ sur $] -1; 3[$. $f(-1) = 7$, $f(3) = -25$, $\lim_{-\infty} f = -\infty$, $\lim_{+\infty} f = +\infty$ (terme x^3).

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	-25	$\nearrow$	$+\infty$

2. f' s'annule en changeant de signe en -1 et en 3 : $f(-1) = 7$ est un **maximum local** (c'est le maximum de f sur l'intervalle ouvert $] -\infty; 3[$) et $f(3) = -25$ est un **minimum local** (minimum de f sur $] -1; +\infty[$). Ce ne sont pas des extremums globaux puisque f prend toutes les grandes valeurs positives et négatives.

Exercice 7

1. $D_f = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2 - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2-1}{x^2}$, nulle en $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}$, $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2\sqrt{2}$. Limites : $-\infty$ en $-\infty$, $+\infty$ en $+\infty$, $-\infty$ en 0^- , $+\infty$ en 0^+ .

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−		−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$ $+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2)$; $f(\pm 2) = -13$, $f(0) = 3$, limites $+\infty$ aux bornes.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-13	$\nearrow$	3	$\searrow$	-13	$\nearrow$	$+\infty$

3. $x^2 + 4x = x(x+4) : D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4; 0\}$. $f'(x) = -\frac{3(2x+4)}{(x^2+4x)^2} = \frac{-6(x+2)}{(x^2+4x)^2}$, du signe de $-(x+2)$; $f(-2) = -\frac{3}{4}$.
Limites : 0 en $\pm\infty$; $x^2 + 4x \rightarrow 0^+$ quand $x \rightarrow -4^-$ ou $x \rightarrow 0^+$, et $\rightarrow 0^-$ quand $x \rightarrow -4^+$ ou $x \rightarrow 0^-$.

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\parallel$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	$-\frac{3}{4}$	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	0

4. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. $f'(x) = \frac{(2x+3)(x+1)-(x^2+3x+3)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$; $f(-2) = -1$, $f(0) = 3$. Limites : $\pm\infty$ en $\pm\infty$ (terme dominant $\frac{x^2}{x} = x$), et en -1 le numérateur tend vers 1 : $-\infty$ à gauche, $+\infty$ à droite.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 8

1. $A(-2; \frac{3}{2}) \in (C_f)$ donc $f(-2) = \frac{3}{2}$. La tangente en A passe par $(-3, 2; 0, 3)$ et $(-0, 8; 2, 7) : f'(-2) = \frac{2,7-0,3}{-0,8+3,2} = 1$.
La tangente en B est horizontale : $f'(-1) = 0$.

2. La demi-tangente à gauche en C passe par $C(1; 0)$ et $(0; 2) : f'_g(1) = \frac{2-0}{0-1} = -2$. La demi-tangente à droite est horizontale : $f'_d(1) = 0$.

3. $f'_g(1) = -2 \neq 0 = f'_d(1) : f$ n'est pas dérivable en 1 (C est un point anguleux).

4. Lecture : $f(-3) = 0$, $f(-1) = 2$, $f(1) = 0$, $f(3) = 2$.

x	-3		-1		1		3
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

5. f croissante $\Rightarrow f' \geq 0$ et décroissante $\Rightarrow f' \leq 0$:

x	-3		-1		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	

(En 1 , f' n'est pas définie.)

Exercice 9

1. $(p\sqrt{p} - q\sqrt{q})^2 = p^3 - 2p\sqrt{p}q\sqrt{q} + q^3 = p^3 + q^3 - 2pq\sqrt{pq}$.

2. $f'(x) = 3x^2 - 3pq = 3(x^2 - (\sqrt{pq})^2) = 3(x + \sqrt{pq})(x - \sqrt{pq})$.

3. Sur $]0; +\infty[$, $x + \sqrt{pq} > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x - \sqrt{pq}$. f est décroissante sur $]0; \sqrt{pq}]$ et croissante sur $[\sqrt{pq}; +\infty[$.

4. $f(\sqrt{pq}) = pq\sqrt{pq} + p^3 + q^3 - 3pq\sqrt{pq} = p^3 + q^3 - 2pq\sqrt{pq} = (p\sqrt{p} - q\sqrt{q})^2 \geq 0$: c'est la valeur minimale de f et elle est positive.

5. Soient $a, b, c > 0$. On applique ce qui précède avec $p = b$, $q = c$ et $x = a$: $f(a) \geq f(\sqrt{bc}) \geq 0$, c'est-à-dire $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$, d'où $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

Exercice 10

Le rectangle imprimé mesure x cm sur $\frac{150}{x}$ cm. L'affiche mesure $(x+4)$ cm sur $\left(\frac{150}{x} + 6\right)$ cm ; son aire est

$$A(x) = (x+4) \left(\frac{150}{x} + 6 \right) = 174 + 6x + \frac{600}{x}, \quad x > 0.$$

$A'(x) = 6 - \frac{600}{x^2} = \frac{6(x^2-100)}{x^2} = \frac{6(x-10)(x+10)}{x^2}$, négative sur $]0; 10]$, positive sur $[10; +\infty[$. A admet donc un minimum en $x = 10$: $A(10) = 294 \text{ cm}^2$. Le texte mesure 10×15 et l'affiche **14 cm de large sur 21 cm de haut**.

Exercice 11

1. Pour $x < 3$: $f(x) = x^2 + 3x + 9$ (car $x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$), donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} + 25) = +\infty$.

2. a. $f(3) = 27$. $\frac{f(x)-27}{x-3} = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} \rightarrow \frac{1}{4}$: $f'_d(3) = \frac{1}{4}$; demi-tangente $y = \frac{1}{4}(x-3) + 27$, $x \geq 3$.

b. $\frac{x^2+3x+9-27}{x-3} = \frac{(x-3)(x+6)}{x-3} = x+6 \rightarrow 9$: $f'_g(3) = 9$; demi-tangente $y = 9(x-3) + 27$, $x \leq 3$.

c. $f'_d(3) \neq f'_g(3)$: f n'est pas dérivable en 3 ; le point $(3; 27)$ est un point anguleux.

3. a. $f'(x) = \frac{3x^2(x-3)-(x^3-27)}{(x-3)^2} = \frac{2x^3-9x^2+27}{(x-3)^2}$.

b. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ sur $]3; +\infty[$.

c. $(x-3)^2(2x+3) = (x^2-6x+9)(2x+3) = 2x^3+3x^2-12x^2-18x+18x+27 = 2x^3-9x^2+27$.

d. Pour $x < 3$: $f'(x) = \frac{(x-3)^2(2x+3)}{(x-3)^2} = 2x+3$. $f'(x) < 0$ sur $] -\infty; -\frac{3}{2} [$ et $f'(x) > 0$ sur $] -\frac{3}{2}; 3 [$; $f'(x) > 0$ sur $]3; +\infty[$. $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 9 = \frac{27}{4}$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+		+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	27	$\nearrow$	$+\infty$

4. $f(0) = 9$, $f'(0) = 3$: $(T) : y = 3x + 9$.

Exercice 12

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x-9} = +\infty$.

2. $f(3) = 9 - 6 - 3 = 0$; $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{3x-9} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0 = f(3)$.

3. a. À gauche : $\frac{x^2-2x-3}{x-3} = \frac{(x-3)(x+1)}{x-3} = x+1 \rightarrow 4$: $f'_g(3) = 4$. À droite : $\frac{\sqrt{3x-9}}{x-3} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{x-3}}{x-3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x-3}} \rightarrow +\infty$: f n'est pas dérivable à droite en 3.

b. Au point $A(3; 0)$, $(\mathcal{C}_f)$ admet à gauche la demi-tangente $y = 4(x-3)$ ($x \leq 3$) et à droite une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

4. a. $f'(x) = 2x - 2$ sur $] -\infty; 3 [$; $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-9}} > 0$ sur $]3; +\infty[$.

b. $f(1) = -4$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+		+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 13

Partie 1. 1. Pour $x > 0$: $(x\sqrt{x})' = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, donc $g'(x) = 3 - 3\sqrt{x} = 3(1 - \sqrt{x})$.

2. $g'(x) > 0 \iff \sqrt{x} < 1 \iff x < 1$. $g(0) = -1$, $g(1) = 0$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	–	
$g(x)$	–1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

3. $g(1) = 0$ est la valeur maximale de g sur $[0; +\infty[$, donc $g(x) \leq 0$ pour tout $x \geq 0$.

Partie 2. 1. $f(0) = 1$. Pour $x > 0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{(2x-2)\sqrt{x}-x^2}{x} = \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}} - x$. Quand $x \rightarrow 0^+$: $\frac{2(x-1)}{\sqrt{x}}$ est de la forme $\frac{-2}{0^+}$, donc la limite est $-\infty$. f n'est pas dérivable à droite en 0 : $(\mathcal{C}_f)$ admet au point $(0; 1)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le bas (limite $-\infty$ à droite : la courbe part verticalement vers le bas).

2. Pour $x > 0$: $f'(x) = 2\sqrt{x} + \frac{2x-2}{2\sqrt{x}} - 2x = \frac{2x+x-1-2x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{3x-2x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = \frac{g(x)}{\sqrt{x}}$.

3. $g(x) \leq 0$ et g ne s'annule qu'en 1 : $f'(x) < 0$ sauf en $x = 1$, donc f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, de $f(0) = 1$ à $-\infty$, avec $f(1) = 0$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		–	0	–	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Comme f est strictement décroissante et $f(1) = 0$: $f(x) > 0$ sur $[0; 1[$, $f(1) = 0$, $f(x) < 0$ sur $]1; +\infty[$. (Vérification : $f(x) = -(x-1)(\sqrt{x}-1)^2$.)

Exercice 14

Méthode : pour montrer $A(x) \geq B(x)$ sur I , on étudie $\varphi = A - B$; si φ est croissante sur I et $\varphi(0) = 0$, alors $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$ pour tout $x \in I$. Chaque inégalité sert à établir la suivante.

- $\varphi_1(x) = x - \sin x$; $\varphi'_1(x) = 1 - \cos x \geq 0$: φ_1 croissante, $\varphi_1(0) = 0$, donc $\varphi_1(x) \geq 0$, soit $\sin x \leq x$.
- $\varphi_2(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$; $\varphi'_2(x) = x - \sin x = \varphi_1(x) \geq 0$: φ_2 croissante, $\varphi_2(0) = 0$, donc $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.
- $\varphi_3(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$; $\varphi'_3(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \varphi_2(x) \geq 0$; $\varphi_3(0) = 0$, donc $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$.
- $\varphi_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos x$; $\varphi'_4(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x = \varphi_3(x) \geq 0$; $\varphi_4(0) = 0$, donc $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.
- $\varphi_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \sin x$; $\varphi'_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos x = \varphi_4(x) \geq 0$; $\varphi_5(0) = 0$, d'où l'inégalité.

2. a. Soit $x > 0$; on applique c. et e. au réel $2x \in I$:

$$2x - \frac{8x^3}{6} \leq \sin(2x) \leq 2x - \frac{8x^3}{6} + \frac{32x^5}{120} \iff \frac{4}{3}x^3 - \frac{4}{15}x^5 \leq 2x - \sin(2x) \leq \frac{4}{3}x^3.$$

En divisant par $x^3 > 0$: $\frac{4}{3} - \frac{4x^2}{15} \leq \frac{2x - \sin 2x}{x^3} \leq \frac{4}{3}$.

b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{4}{3} - \frac{4x^2}{15} \right) = \frac{4}{3}$: par encadrement (gendarmes), $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x - \sin 2x}{x^3} = \frac{4}{3}$.

3. Pour $x < 0$, on pose $t = -x > 0$: $\frac{2x - \sin 2x}{x^3} = \frac{-2t + \sin 2t}{-t^3} = \frac{2t - \sin 2t}{t^3}$; quand $x \rightarrow 0^-$, $t \rightarrow 0^+$, donc la limite à gauche vaut aussi $\frac{4}{3}$. Les limites à droite et à gauche étant égales : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{x^3} = \frac{4}{3}$.

Exercice 15

1. a. $f'(x) = 1 - \frac{9}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2-9}{(x-1)^2} = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$.

b. La tangente en $M(a; f(a))$ est parallèle à l'axe des abscisses $\iff f'(a) = 0 \iff a = 4$ ou $a = -2$. Les points sont $M_1(4; 13)$ et $M_2(-2; 1)$.

2. $h(0) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0 + 6 - 9 = -3$. À gauche : h coïncide avec f , dérivable en 0, donc $h'_g(0) = f'(0) = 1 - 9 = -8$. À droite : $\frac{x^2-4x-3+3}{x} = x - 4 \rightarrow -4$: $h'_d(0) = -4$. $h'_g(0) \neq h'_d(0)$: h n'est pas dérivable en 0 ; le point $(0; -3)$ est un point anguleux (demi-tangentes $y = -8x - 3$, $x \leq 0$ et $y = -4x - 3$, $x \geq 0$).

3. a. $h(2) = -7$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 4x - 3) = -7$. À gauche : $\frac{x^2-4x-3+7}{x-2} = \frac{(x-2)^2}{x-2} = x - 2 \rightarrow 0$: $h'_g(2) = 0$, demi-tangente horizontale $y = -7$ ($x \leq 2$). À droite : $\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} = \frac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{x-2} = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} \rightarrow +\infty$: non dérivable à droite, demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

b. Sur $]2; +\infty[$, $x^2 - 4 > 0$, donc h est dérivable et $h'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.

c. $h(2\sqrt{2}) = \sqrt{8-4} - 7 = -5$, $h'(2\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$: (T) : $y = \sqrt{2}(x - 2\sqrt{2}) - 5 = \sqrt{2}x - 9$.

Exercice 16

1. $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. $g(-2) = -8 - 2 + 4 = -6 < 0$ et $g(-1) = -1 - 1 + 4 = 2 > 0$. Raisonnons par l'absurde : si $\alpha \leq -2$, comme g est croissante, $0 = g(\alpha) \leq g(-2) = -6$, absurde ; si $\alpha \geq -1$, $0 = g(\alpha) \geq g(-1) = 2$, absurde. Donc $-2 < \alpha < -1$. g étant strictement croissante : $g(x) < g(\alpha) = 0$ pour $x < \alpha$ et $g(x) > 0$ pour $x > \alpha$.

3. a. $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} = \frac{x^3+x+4}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$.

b. Signe de f' : sur $] -\infty; \alpha[$: $g < 0$, $x^3 < 0$ donc $f' > 0$; sur $] \alpha; 0[$: $g > 0$, $x^3 < 0$, $f' < 0$; sur $] 0; +\infty[$: $g > 0$, $x^3 > 0$, $f' > 0$. Ainsi f est croissante sur $] -\infty; \alpha]$, décroissante sur $[\alpha; 0[$ et croissante sur $] 0; +\infty[$.

c. $f(2) = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$ et $f'(2) = \frac{g(2)}{8} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$: (T) : $y = \frac{7}{4}(x - 2) + 1 = \frac{7}{4}x - \frac{5}{2}$.

Exercice 17

1. On se ramène à la définition $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a+k)-f(a)}{k} = f'(a)$.

$$- \frac{f(a+5h)-f(a)}{h} = 5 \cdot \frac{f(a+5h)-f(a)}{5h} \rightarrow 5f'(a) = -15 \text{ (on a posé } k = 5h \rightarrow 0).$$

$$- \frac{f(a-2h)-f(a+h)}{h} = -2 \cdot \frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h} - \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \rightarrow -2f'(a) - f'(a) = -3f'(a) = 9.$$

$$- \frac{f(a+4h)-f(a-h)}{2h} = 2 \cdot \frac{f(a+4h)-f(a)}{4h} + \frac{1}{2} \cdot \frac{f(a-h)-f(a)}{-h} \rightarrow 2f'(a) + \frac{1}{2}f'(a) = \frac{5}{2}f'(a) = -\frac{15}{2}.$$

2. On fait apparaître des taux d'accroissement :

$$\frac{x^2 f(a) - a^2 f(x)}{x - a} = \frac{(x^2 - a^2)f(a) - a^2(f(x) - f(a))}{x - a} = (x + a)f(a) - a^2 \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

qui tend, quand $x \rightarrow a$, vers

$$2af(a) - a^2 f'(a) = 2af(a) + 3a^2.$$

Exercice 18

1. Avec $u = (1+x)^n$, $u' = n(1+x)^{n-1}$, $v = 1+x^n$, $v' = nx^{n-1}$:

$$f'(x) = \frac{n(1+x)^{n-1}(1+x^n) - (1+x)^n nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} = \frac{n(1+x)^{n-1}(1+x^n - x^{n-1} - x^n)}{(1+x^n)^2} = \frac{n(1+x)^{n-1}(1-x^{n-1})}{(1+x^n)^2}.$$

2. Pour $x > 0$ et $n-1 \geq 1$: $x^{n-1} < 1 \iff x < 1$. Donc $f' > 0$ sur $]0; 1[$, $f'(1) = 0$, $f' < 0$ sur $]1; +\infty[$; $f(1) = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	2^{n-1}	$\searrow$	

3. $f(1) = 2^{n-1}$ est la valeur maximale de f : pour tout $x > 0$, $\frac{(1+x)^n}{1+x^n} \leq 2^{n-1}$, et comme $1+x^n > 0$: $(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n)$.

4. Soient $a, b > 0$; on applique 3. avec $x = \frac{b}{a}$: $\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \leq 2^{n-1} \left(1 + \frac{b^n}{a^n}\right)$. En multipliant par $a^n > 0$: $(a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n)$, puis en divisant par 2^n : $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}$.

Exercice 19

1. Soit $x > 0$ la longueur ; la largeur est $\frac{81}{x}$ et le périmètre $P(x) = 2\left(x + \frac{81}{x}\right)$. $P'(x) = 2\left(1 - \frac{81}{x^2}\right) = \frac{2(x-9)(x+9)}{x^2}$: P décroît sur $]0; 9]$ et croît sur $[9; +\infty[$. Le périmètre est minimal pour $x = 9$: le rectangle est un **carré de côté 9 m** (périmètre 36 m).

2. $y = \frac{12}{x}$, donc $x + 3y = S(x) = x + \frac{36}{x}$, $x > 0$. $S'(x) = 1 - \frac{36}{x^2} = \frac{(x-6)(x+6)}{x^2}$: minimum en $x = 6$, alors $y = 2$ et $x + 3y = 12$ (valeur minimale).

Exercice 20

Partie 1. 1. $x^2 + (2-x)^2 = 2x^2 - 4x + 4 = 2(x^2 - 2x + 1) + 2 = 2(x-1)^2 + 2 \geq 2 > 0$: le dénominateur ne s'annule jamais, donc $D_f = \mathbb{R}$.

2. $f(x) = \frac{x^2}{2x^2 - 4x + 4}$: quotient des termes de plus haut degré $\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$. Donc $\lim_{\pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

3. a. f est rationnelle définie sur $\mathbb{R}$, donc dérivable sur $\mathbb{R}$; avec $v = 2x^2 - 4x + 4$, $v' = 4x - 4$:

$$f'(x) = \frac{2x(2x^2 - 4x + 4) - x^2(4x - 4)}{v^2} = \frac{-4x^2 + 8x}{v^2} = \frac{-4x(x-2)}{(x^2 + (2-x)^2)^2}.$$

b. $f'(x) > 0 \iff x(x-2) < 0 \iff 0 < x < 2$. $f(0) = 0$, $f(2) = \frac{4}{4} = 1$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

c. D'après le tableau, $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(0) = 0$ est le minimum absolu et $f(2) = 1$ le maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$.

d. $f'(1) = \frac{-4 \times (-1)}{2^2} = 1$: la tangente au point $(1; \frac{1}{2})$ a pour coefficient directeur 1 ; elle est parallèle à la première bissectrice : $y = x - \frac{1}{2}$.

4. f est strictement croissante sur $[0; 2]$ et (fonction rationnelle sans pôle) prend toutes les valeurs entre $f(0)$ et $f(2)$: $f([0; 2]) = [0; 1]$.

Partie 2. 1. Raisonnement par l'absurde. Supposons qu'il existe $x \in [0; 2]$ tel que $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} = 0$. Une somme de deux réels positifs est nulle si et seulement si les deux sont nuls : $x = 0$ et $2-x = 0$, soit $x = 0$ et $x = 2$: contradiction. Donc $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} \neq 0$ pour tout $x \in [0; 2]$.

2. $x \in D_g \iff (x \geq 0 \text{ et } 2-x \geq 0 \text{ et } \sqrt{x} + \sqrt{2-x} \neq 0) \iff x \in [0; 2]$ (d'après 1.). Donc $D_g = [0; 2]$.

3. a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} + \sqrt{2-x}) = \sqrt{2}$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = g(0)$.

b. Soit $x \in [0; 2]$; alors $2-x \in [0; 2]$ et $g(2-x) = \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x} + \sqrt{x}}$, d'où $1 - g(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2-x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{2-x}} = g(2-x)$.

4. a. Pour $0 < x \leq 2$: $\frac{g(x)-g(0)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{2-x})}$, forme $\frac{1}{0^+}$: la limite est $+\infty$. g n'est pas dérivable à droite en 0 : demi-tangente verticale (dirigée vers le haut) au point $O(0; 0)$.

b. Raisonnement par l'absurde. Si g était dérivable à gauche en 2, alors d'après 3.b., $g(x) = 1 - g(2-x)$; pour $x \rightarrow 0^+$, $\frac{g(x)-g(0)}{x} = \frac{g(2-x)-g(2)}{-x}$ tendrait vers $g'_g(2)$, réel ; or ce taux tend vers $+\infty$. Contradiction : g n'est pas dérivable à gauche en 2.

5. a. Sur $]0; 2[$, $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = \sqrt{2-x}$ sont dérivables, $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $v' = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$, et $u + v \neq 0$. Alors

$$g' = \frac{u'(u+v) - u(u'+v')}{(u+v)^2} = \frac{u'v - uv'}{(u+v)^2}, \quad u'v - uv' = \frac{\sqrt{2-x}}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{2-x}} = \frac{(2-x) + x}{2\sqrt{x}\sqrt{2-x}} = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}.$$

$$\text{D'où } g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}(\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^2}.$$

b. $g'(x) > 0$ sur $]0; 2[$: g est strictement croissante sur $[0; 2]$, de $g(0) = 0$ à $g(2) = 1$ (demi-tangentes verticales aux deux extrémités).

c. $g(1) = \frac{1}{2}$ et $g'(1) = \frac{1}{1 \times 1 \times 2^2} = \frac{1}{4}$: (T) : $y = \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$.

Exercice 21

1. a. Pour tout réel X : $X - 1 < E(X) \leq X$. Avec $X = \frac{2}{x}$ ($x > 0$) : $\frac{2}{x} - 1 < E\left(\frac{2}{x}\right) \leq \frac{2}{x}$, et en multipliant par $x > 0$: $2 - x < xE\left(\frac{2}{x}\right) \leq 2$, soit $-x < xE\left(\frac{2}{x}\right) - 2 \leq 0$. Donc $\left|xE\left(\frac{2}{x}\right) - 2\right| \leq x$, puis en divisant par $|a|$: $\left|\frac{x}{a}E\left(\frac{2}{x}\right) - \frac{2}{a}\right| \leq \left|\frac{x}{a}\right|$.

b. Pour $x > 0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{x}{a}E\left(\frac{2}{x}\right)$. Or $\left|\frac{x}{a}\right| \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$; par encadrement, $\frac{x}{a}E\left(\frac{2}{x}\right) \rightarrow \frac{2}{a}$. Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = \frac{2}{a}$.

2. Pour $x < 0$: $3 \cos(bx) - 2 \cos(2x) - 1 = -3(1 - \cos bx) + 2(1 - \cos 2x)$, donc

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{-3(1 - \cos bx) + 2(1 - \cos 2x)}{x^2} = -3b^2 \frac{1 - \cos bx}{(bx)^2} + 8 \frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\frac{3b^2}{2} + 4$$

(si $b = 0$, le premier terme est nul et le résultat reste 4). Donc $f'_g(0) = 4 - \frac{3b^2}{2}$.

3. (Δ) : $y = -\frac{1}{2}x$ a pour coefficient directeur $-\frac{1}{2}$; deux droites non verticales sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs vaut -1 . On veut donc $f'(0) = 2$, ce qui équivaut (chaîne d'équivalences) à :

$$f'_d(0) = f'_g(0) = 2 \iff \frac{2}{a} = 2 \text{ et } 4 - \frac{3b^2}{2} = 2 \iff a = 1 \text{ et } b^2 = \frac{4}{3} \iff a = 1 \text{ et } b \in \left\{-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}.$$