

Corrigé détaillé de la série — Chapitre 10

Rotation dans le plan

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — méthodes utilisées

- **Définition** : pour $M \neq \Omega$, $r(\Omega; \theta)(M) = N \iff \Omega M = \Omega N$ et $(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega N}) \equiv \theta [2\pi]$.
- **Propriétés** : une rotation conserve les distances, les angles orientés, l'alignement, le milieu, le barycentre, le parallélisme et l'orthogonalité.
- Si r est une rotation d'angle θ et $r(M) = M'$, $r(N) = N'$ ($M \neq N$), alors $(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M'N'}) \equiv \theta [2\pi]$; si $\theta \equiv \pm \frac{\pi}{2}$, $(MN) \perp (M'N')$.
- Toutes les affirmations ont été contrôlées numériquement (nombres complexes) dans `build/verif_lot1_geo.py`.

Exercice 1

1. Les diagonales d'un carré sont de même longueur, se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires : $OB = OC$ et, l'orientation étant directe, $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Donc $r(B) = C$, c'est-à-dire $r^{-1}(C) = B$.
2. De même $OD = OA$ et $(\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, donc $r(D) = A$ et $r^{-1}(A) = D$.

Exercice 2

1. E est le point tel que $AE = AB$ et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE}) \equiv -\frac{\pi}{2}$; de même pour F à partir de C .
2. $r(B) = E$ et $r(C) = F$. La rotation conserve les distances : $EF = BC$. De plus $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{EF}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$, donc $(EF) \perp (BC)$.

Exercice 3

1. La rotation conserve le coefficient de colinéarité : $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} \implies \overrightarrow{r(A)r(B)} = -2\overrightarrow{r(A)r(C)}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{A'B'} = -2\overrightarrow{A'C'}$.
2. O est le centre de r , donc $r(O) = O$. La rotation conserve le milieu : O milieu de $[BC] \implies r(O) = O$ milieu de $[r(B)r(C)] = [B'C']$.

Exercice 4

1. $CA = CB$ et $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ (triangle équilatéral direct). Donc $r = r(C; \frac{\pi}{3})$.
2. D vérifie $CD = CB$ et $(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}) \equiv \frac{\pi}{3}$: le triangle CBD est équilatéral, D et A de part et d'autre de (BC) .
3. CBD est équilatéral, donc $BD = DC = CB$; et $AB = BC = CA$. Ainsi $AB = BD = DC = CA$: le quadrilatère $ABDC$ a ses quatre côtés égaux, c'est un losange.

Exercice 5

1. Pour $r = r(O; \frac{\pi}{2})$: $r(A) = B$, $r(B) = C$ et $r(C) = D$ (diagonales du carré direct). La rotation conserve le milieu : I milieu de $[BC] \implies r(I)$ milieu de $[CD]$, donc $r(I) = J$. Comme $r(A) = B$ et $r(I) = J$: $AI = BJ$ (conservation des distances) et $(\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{BJ}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, donc $(AI) \perp (BJ)$.

Exercice 6

1. On choisit $r = r(A; \frac{\pi}{2})$. Le triangle étant direct, D (extérieur) vérifie $AD = AB$ et $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}$, donc $r(D) = B$; E vérifie $AC = AE$ et $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{2}$, donc $r(C) = E$. Ainsi r transforme le segment $[DC]$ en $[BE]$: $CD = BE$ et $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BE}) \equiv \frac{\pi}{2}$, d'où $(CD) \perp (BE)$.

Exercice 7

1. Dans le triangle rectangle isocèle ABC , le milieu I de l'hypoténuse vérifie $IA = IB = IC$ et $(IC) \perp (AB)$. Avec l'orientation donnée, $(\overrightarrow{IA}; \overrightarrow{IC}) \equiv \frac{\pi}{2}$ et $(\overrightarrow{IC}; \overrightarrow{IB}) \equiv \frac{\pi}{2}$. Donc $r(A) = C$ et $r(C) = B$.

2. F vérifie $IF = IE$ et $(\overrightarrow{IE}; \overrightarrow{IF}) \equiv \frac{\pi}{2}$.

3. $\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{CB}$, donc $(\overrightarrow{CE}; \overrightarrow{CA}) \equiv \pi + (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}) \equiv \pi + \frac{\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$. Or $r(C) = B$, $r(E) = F$, $r(A) = C$ et la rotation conserve les angles orientés : $(\overrightarrow{BF}; \overrightarrow{BC}) \equiv (\overrightarrow{CE}; \overrightarrow{CA}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

4. $r(C) = B$ et $r(E) = F$, donc $BF = CE$; or $CE = CB$ (C milieu de $[BE]$) et $CB = CA$. Donc $BF = CA$.

5. $(AC) \perp (BE)$ et C est le milieu de $[BE]$: (AC) est la médiatrice de $[BE]$, donc $AE = AB$. Puis $r(A) = C$ et $r(E) = F$ donnent $CF = AE = AB$.

6. D'après 3, $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BF}) \equiv \frac{\pi}{2}$; de plus $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CA}) \equiv \pi + (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}) \equiv -\frac{\pi}{2}$, donc, par Chasles, $(\overrightarrow{BF}; \overrightarrow{CA}) \equiv (\overrightarrow{BF}; \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CA}) \equiv -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \equiv \pi$: les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de même sens. Avec $BF = CA$ (question 4), on obtient $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC}$. Le quadrilatère $ACFB$ est donc un **parallélogramme** (il n'est ni un losange car $AC \neq CF$, ni un rectangle car (AC) n'est pas perpendiculaire à (CF)).

Exercice 8

1. On choisit $r = r(A; \frac{\pi}{2})$ (sens de la figure : de $\overrightarrow{AD}$ vers $\overrightarrow{AF}$, et de $\overrightarrow{AB}$ vers $\overrightarrow{AD}$). On a $AD = AF$ et $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{2}$, donc $r(D) = F$. $AG = AH$ (rayons de (Γ)) et $(\overrightarrow{AG}; \overrightarrow{AH}) \equiv (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}$, donc $r(G) = H$. D'où $DG = FH$.

De même $AC = AE$ (diagonales de deux carrés de même côté) et $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{2}$, donc $r(C) = E$; $AH = AI$ et $(\overrightarrow{AH}; \overrightarrow{AI}) \equiv \frac{\pi}{2}$, donc $r(H) = I$. D'où $CH = EI$.

Exercice 9

1. $r(A) = B$ et $r(B) = C$, donc $\alpha \equiv (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}) \equiv \pi + (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \equiv \pi - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

2. $\Omega A = \Omega B$ et $\Omega B = \Omega C$: Ω appartient aux médiatrices de $[AB]$ et $[BC]$, c'est le centre du cercle circonscrit, donc le centre de gravité G du triangle équilatéral. (Vérification : $(\overrightarrow{GA}; \overrightarrow{GB}) \equiv \frac{2\pi}{3}$.)

Exercice 10

1. Angle : $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{AB}) \equiv \pi + (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) \equiv \pi - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$. Centre : $\Omega C = \Omega A$ et $\Omega A = \Omega B$, donc Ω est le point d'intersection des médiatrices de $[CA]$ et $[AB]$, c'est-à-dire le centre du cercle circonscrit au triangle ABC . Ainsi $r = r(\Omega; \frac{3\pi}{4})$.

Exercice 11

1. Figure : D s'obtient en tournant B de $\frac{\pi}{2}$ autour de A , E en tournant D de $\frac{\pi}{2}$, G en tournant E de $\frac{\pi}{2}$.

2. $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE}) \equiv (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}) \equiv \pi [2\pi]$ (Chasles). Comme $AB = AE$, $r = r(A; \pi)$: c'est la symétrie centrale de centre A .

3. a. $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AG}) \equiv (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AG}) \equiv \pi$ et $AD = AG$, donc $r(D) = G$. r transforme le carré $ABCD$ en un carré de sommets $A, E, r(C), G$; le quatrième sommet du carré $AEFG$ étant F , $r(C) = F$. (Autrement : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et la symétrie centrale donne $\overrightarrow{Ar(C)} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AF}$.)

3. b. $r(B) = E$, $r(C) = F$ et r est d'angle π : $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{EF}) \equiv \pi [2\pi]$.

4. La somme des coefficients vaut 1 : $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DC}$ (car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC}$). Donc $K \in (DC)$. La rotation conserve l'alignement : D, C, K alignés $\implies r(D) = G$, $r(C) = F$, $r(K) = K'$ alignés.

Exercice 12

1. $C : OC = OF$, $(\overrightarrow{OF}; \overrightarrow{OC}) \equiv -\frac{\pi}{2}$. $D = r^{-1}(E) : OD = OE$, $(\overrightarrow{OE}; \overrightarrow{OD}) \equiv \frac{\pi}{2}$.

2. $r(D) = E$ et $r(F) = C : DF = EC$ et $(\overrightarrow{DF}; \overrightarrow{EC}) \equiv -\frac{\pi}{2}$, donc $(DF) \perp (EC)$.

3. a. $r \circ r$ est la rotation de centre O et d'angle $-\pi$, c'est-à-dire la symétrie centrale de centre O . Or $r \circ r(D) = r(E) = A$: A est le symétrique de D par rapport à O , donc O est le milieu de $[AD]$.

3. b. I est le milieu de $[EF]$; la rotation conserve le milieu : $J = r(I)$ est le milieu de $[r(E)r(F)] = [AC]$. Dans le triangle ADC , O et J sont les milieux de $[AD]$ et $[AC]$: par le théorème des milieux, $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, soit $2\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{DC}$.

3. c. $r(O) = O$ et $r(I) = J : (OI) \perp (OJ)$. Or $(OJ) \parallel (DC)$, donc $(OI) \perp (DC)$. Mais $(OH) \perp (DC)$ aussi. Par O passe une seule perpendiculaire à $(DC) : (OI) = (OH)$, donc I, O et H sont alignés.

Exercice 13

1. $AFME$ est un parallélogramme (côtés opposés parallèles), donc $AE = FM$. Dans le triangle BFM : $(FM) \parallel (AC)$, donc $\widehat{FMB} = \widehat{ACB} = \widehat{ABC} = \widehat{FBM}$; le triangle BFM est isocèle en F et $FM = FB$. Ainsi $AE = BF$.

2. On a $A \neq E$, $B \neq F$, $AE = BF \neq 0$ et $\overrightarrow{AE} \neq \overrightarrow{BF}$ (ces vecteurs ne sont pas colinéaires de même sens : $\overrightarrow{AE}$ est dirigé comme $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BF}$ comme $\overrightarrow{BA}$). D'après le cours, il existe une unique rotation r telle que $r(A) = B$ et $r(E) = F$.

3. Angle : $(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{BF}) \equiv (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BA}) \equiv \pi + (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) \equiv \pi - \alpha [2\pi]$.

4. $C \in (AE)$ avec $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AE}$ ($k = \frac{AC}{AE} > 0$). La rotation conserve le coefficient de colinéarité : $\overrightarrow{Br(C)} = k\overrightarrow{BF}$; or $\overrightarrow{BA} = \frac{BA}{BF}\overrightarrow{BF} = \frac{AC}{AE}\overrightarrow{BF} = k\overrightarrow{BF}$. Donc $r(C) = A$.

5. $r(A) = B$ et $r(C) = A : \Omega A = \Omega B$ et $\Omega C = \Omega A$; Ω est l'intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$: c'est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

Exercice 14

1. Soit $\rho = r(C; \frac{\pi}{2})$. $CD = CB$ et $(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2}$ (carré direct), donc $\rho(D) = B$. $CE = CD = CB = CF$ et $(\overrightarrow{CE}; \overrightarrow{CF}) \equiv (\overrightarrow{CE}; \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CF}) \equiv -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{2}$, donc $\rho(E) = F$. Par suite $DE = BF$ et $(DE) \perp (BF)$.

2. On calcule les angles géométriques en E .

- Triangle DAE : $DA = DC = DE$, il est isocèle en D et $\widehat{ADE} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$; donc $\widehat{DEA} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.
- Triangle CEF : $CE = CF$ et $\widehat{ECF} = 90^\circ$ (question 1); donc $\widehat{CEF} = 45^\circ$.
- $\widehat{CED} = 60^\circ$.

Les angles $\widehat{AED}$, $\widehat{DEC}$ et $\widehat{CEF}$ sont adjacents (dans cet ordre autour de E) et $75^\circ + 60^\circ + 45^\circ = 180^\circ$: l'angle $\widehat{AEF}$ est plat, donc A, E et F sont alignés.

Exercice 15

1. a. $E : AE = AB$, $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{3}$; $F : AF = AC$, $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{3}$.

1. b. $R(B) = E$ et $R(C) = F$; la rotation conserve les distances : $EF = BC$.

2. a. $K : AK = AB$ et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AK}) \equiv -\frac{2\pi}{3}$.

2. b. $AE = AB = AK$ et $(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AK}) \equiv (\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AK}) \equiv -\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} \equiv -\pi [2\pi] : \overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{AE}$, donc A est le milieu de $[EK]$.

3. $AF = AC = AB = AE = AK : E, F, K$ appartiennent au cercle de centre A et de diamètre $[EK]$, et $F \neq E$ (car $C \neq B$), $F \neq K$ (sinon $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$ et A, B, C seraient alignés). Un triangle inscrit dans un cercle ayant pour côté un diamètre est rectangle : EFK est rectangle en F .

Exercice 16

1. $R_A^{-1}(A) = A$ et $R_B(A) = A'$ avec $BA' = BA$, $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BA'}) \equiv -\frac{2\pi}{3}$. Comme $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{3}$, on a $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA'}) \equiv -\frac{\pi}{3}$ et $BA' = BC : BCA'$ est équilatéral et $ABA'C$ est un losange ; ses diagonales $[AA']$ et $[BC]$ ont le même milieu I . Ensuite $R_A^{-1}(B) = P$ avec $AP = AB$, $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AP}) \equiv -\frac{\pi}{3}$; puis $BP = BA$ (triangle ABP équilatéral) et $(\overrightarrow{BP}; \overrightarrow{BC}) \equiv (\overrightarrow{BP}; \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \equiv -\frac{2\pi}{3}$, et $BC = BA = BP : \text{donc } R_B(P) = C$, c'est-à-dire $B' = C$.

2. $R_A^{-1} = r(A; -\frac{\pi}{3})$; $R_B \circ R_A^{-1}$ est la composée de deux rotations de centres distincts dont la somme des angles est $-\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -\pi \not\equiv 0 [2\pi] : R_B \circ R_A^{-1}$ est une rotation d'angle $-\pi$, c'est-à-dire une **symétrie centrale**. Son centre est le milieu de $[AA']$: c'est I (question 1).

3. $R_B \circ R_A^{-1}(M_1) = R_B(M) = M_2$; d'après 2, M_2 est le symétrique de M_1 par rapport à I : I est le milieu de $[M_1M_2]$.

4. La somme des angles est $\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} \not\equiv 0 [2\pi] : R_B \circ R_A$ est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Pour le centre, on décompose (théorème de décomposition) :

- $(\overrightarrow{AJ}; \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{6}$ (dans le triangle ABJ isocèle en B avec $\widehat{ABJ} = 120^\circ$) : donc $R_A = S_{(AB)} \circ S_{(AJ)}$ (angle $2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$) ;
- $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BJ})$: on a $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BJ}) \equiv -\frac{\pi}{3}$, donc $R_B = S_{(BJ)} \circ S_{(AB)}$ (angle $2 \times (-\frac{\pi}{3}) = -\frac{2\pi}{3}$).

Ainsi $R_B \circ R_A = S_{(BJ)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AJ)} = S_{(BJ)} \circ S_{(AJ)}$. Les droites (AJ) et (BJ) se coupent en J : $R_B \circ R_A$ est la rotation de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.