

Corrigé détaillé de la série — Chapitre 09

Limite d'une fonction

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — méthodes utilisées

- **Forme déterminée** : on applique directement les opérations sur les limites ; pour une forme $\frac{\ell}{0}$ ($\ell \neq 0$), on étudie le **signe** du dénominateur au voisinage du point.
- **Forme indéterminée** ($\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$) : factorisation par $(x - a)$, identités remarquables, expression conjuguée, factorisation par le terme dominant, changement de variable, encadrement.
- **Trigonométrie** : $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\tan X}{X} = 1$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{1 - \cos X}{X^2} = \frac{1}{2}$.
- Tous les résultats ont été contrôlés avec Python/sympy (`build/verif_lot1.py`).

Exercice 1

1. Forme déterminée : $\lim_{x \rightarrow 4} \left(5x^3 + 2 - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) = 5 \times 64 + 2 - \frac{3}{2} = \frac{641}{2}$.
2. $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$. Quand $x \rightarrow 3^+$: $x - 3 \rightarrow 0^+$ et $x + 2 \rightarrow 5$, donc le dénominateur tend vers 0^+ ; le numérateur tend vers $12 > 0$. Forme $\frac{12}{0^+}$: la limite est $+\infty$.
3. $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$. Pour $x \rightarrow 1^-$: $x - 1 < 0$ et $x - 3 < 0$, donc le dénominateur tend vers 0^+ ; le numérateur tend vers 3. La limite est $+\infty$.
4. Pour $x \rightarrow 2^+$: $2 - x \rightarrow 0^-$ et $3x - 7 \rightarrow -1$. Forme $\frac{-1}{0^-}$: la limite est $+\infty$.
5. $x - x^2 = x(1 - x)$; pour $x \rightarrow 0^-$: $x < 0$ et $1 - x > 0$, donc $x - x^2 \rightarrow 0^-$. Forme $\frac{5}{0^-}$: la limite est $-\infty$.
6. $9 - x^2 = (3 - x)(3 + x)$; pour $x \rightarrow 3^-$: $3 - x > 0$, donc $9 - x^2 \rightarrow 0^+$. La limite est $+\infty$.
7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x)^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - 3x^2) = -\infty$; le produit tend vers $-\infty$.
8. Pour $x \rightarrow 0^-$: $\frac{1}{x^4} \rightarrow +\infty$ et $x^3 \rightarrow 0^-$ donc $-\frac{1}{x^3} \rightarrow +\infty$. Somme de deux limites $+\infty$: la limite est $+\infty$.
9. Pour $x \rightarrow 0^-$: $-\frac{3}{x} \rightarrow +\infty$, donc $2 - \frac{3}{x} \rightarrow +\infty$ et $\sqrt{2 - \frac{3}{x}} \rightarrow +\infty$.
10. $1 - 5 \times (-3) = 16 \geq 0$: $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{1 - 5x} = \sqrt{16} = 4$.
11. $\frac{3x}{x-1} \rightarrow +\infty$ (forme $\frac{3}{0^+}$) et $-\frac{2}{1-x^2} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} \rightarrow +\infty$ (forme $\frac{2}{0^+}$). La somme tend vers $+\infty$.

Exercice 2

1. Forme $\frac{0}{0}$. -1 est racine des deux polynômes : $3x^2 + 5x + 2 = (x + 1)(3x + 2)$ et $-x^3 + x^2 + 5x + 3 = -(x + 1)^2(x - 3)$. Pour $x \neq -1$:

$$\frac{3x^2 + 5x + 2}{-x^3 + x^2 + 5x + 3} = \frac{3x + 2}{-(x + 1)(x - 3)}.$$

Quand $x \rightarrow -1^+$: $3x + 2 \rightarrow -1$ et $-(x + 1)(x - 3) \rightarrow 0^+$ (car $x + 1 > 0$ et $x - 3 < 0$). La limite est $-\infty$.

2. Forme $\frac{0}{0}$; pour $x \geq 0$, $x \neq 16$: $x - 16 = (\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} + 4)$, donc la limite vaut $\lim_{x \rightarrow 16} (\sqrt{x} + 4) = 8$.
3. Forme $\infty - \infty$. Pour $x > 0$: $3x - 2\sqrt{x} = x \left(3 - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$; $3 - \frac{2}{\sqrt{x}} \rightarrow 3$ donc la limite est $+\infty$.
4. Forme $\infty - \infty$. $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} = \frac{x-1}{x^3}$: forme $\frac{-1}{0^+}$, la limite est $-\infty$.
5. $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ et $x - 2 = (\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})$, d'où $\frac{x^2 - 4}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = (x + 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2}) \rightarrow 4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.
6. $\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(3x+2)} = \frac{x+3}{3x+2} \rightarrow \frac{4}{5}$.
7. Pour $x > 0$: $x - \sqrt{3x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{3})$ et $x - 3 = (\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})$, donc l'expression vaut $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$.

8. $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x(x-3)} = \frac{1}{x(\sqrt{x}+\sqrt{3})} \rightarrow \frac{1}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{18}$.
9. $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$, donc la limite vaut $4 + 4 + 4 = 12$.
10. $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-2}{x+1} \rightarrow -\frac{1}{2}$.
11. $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ et $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$, donc la limite vaut $\frac{5}{3}$.
12. $(3+x)^3 - 27 = x((3+x)^2 + 3(3+x) + 9)$, donc la limite vaut $9 + 9 + 9 = 27$.
13. $\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)^2} = \frac{x+3}{x-1}$: forme $\frac{4}{0^+}$, la limite est $+\infty$.
14. $(x+1)^3 + (x-2)^2 - 5 = x^3 + 4x^2 - x = x(x^2 + 4x - 1)$, donc la limite vaut -1 .
15. $x^3 - 2x - 21 = (x-3)(x^2 + 3x + 7)$ et $x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = (x-3)^2(x+1)$, donc pour $x \neq 3$ l'expression vaut $\frac{x^2+3x+7}{(x-3)(x+1)}$: forme $\frac{25}{0^+}$, la limite est $+\infty$.
16. $2x^3 - 4x^2 - x + 2 = 2x^2(x-2) - (x-2) = (x-2)(2x^2 - 1)$ et $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, donc la limite vaut $\frac{7}{-1} = -7$.
17. Forme $\infty - \infty$. Pour $x > \frac{1}{3}$: $\sqrt{3x-1} - 2x^2 + x + 5 = x^2 \left(\frac{\sqrt{3x-1}}{x^2} - 2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} \right)$; or $\frac{\sqrt{3x-1}}{x^2} = \sqrt{\frac{3x-1}{x^4}} \rightarrow 0$, donc la parenthèse tend vers -2 et la limite est $-\infty$.
18. Pour $x < 0$: $\sqrt{5-x} - x^4 + x = x^4 \left(\sqrt{\frac{5-x}{x^8}} - 1 + \frac{1}{x^3} \right)$, la parenthèse tend vers -1 : la limite est $-\infty$.

Exercice 3

Dans chaque cas la forme est $\frac{0}{0}$; on multiplie par l'expression conjuguée (non nulle au voisinage du point).

1. $\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} = \frac{(x+8)-9}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x+8}+3} \rightarrow \frac{1}{6}$.
2. $\frac{(4+x)-(4-x)}{x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})} = \frac{2}{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}} \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
3. $\frac{(2x+5)-(4x+1)}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+\sqrt{4x+1})} = \frac{-2}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{4x+1}} \rightarrow -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$.
4. $\frac{x^2-1}{x(x+1)(\sqrt{x^2+8}+3)} = \frac{x-1}{x(\sqrt{x^2+8}+3)} \rightarrow \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$.
5. $\frac{(x-3)(\sqrt{x^2+16}+5)}{x^2-9} = \frac{\sqrt{x^2+16}+5}{x+3} \rightarrow \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$.
6. $\frac{x}{x(x-1)(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x+1}+1)} \rightarrow -\frac{1}{2}$.
7. On utilise deux conjuguées : $\sqrt{5x+1} - \sqrt{x+13} = \frac{4(x-3)}{\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+13}}$ et $\sqrt{x+6} - 3 = \frac{x-3}{\sqrt{x+6}+3}$. Le quotient vaut $\frac{4(\sqrt{x+6}+3)}{\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+13}} \rightarrow \frac{24}{8} = 3$.
8. $\frac{(x-2)}{\sqrt{x+7}+3} \times \frac{\sqrt{4x+1}+3}{4(x-2)} \rightarrow \frac{1}{6} \times \frac{6}{4} = \frac{1}{4}$.
9. $(3x-2) - (x^2 - x + 1) = -(x-1)(x-3)$, donc l'expression vaut $\frac{-(x-3)}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x^2-x+1}} \rightarrow \frac{2}{2} = 1$.
10. $\frac{(x-4)(x+4)(\sqrt{2x+1}+3)}{2(x-4)} = \frac{(x+4)(\sqrt{2x+1}+3)}{2} \rightarrow \frac{8 \times 6}{2} = 24$.
11. Pour $x > 3$: $\frac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x-3}} = \sqrt{x+3}$ et $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x-3}} = \frac{x-3}{\sqrt{x-3}(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$. La limite vaut $\sqrt{6} + 0 = \sqrt{6}$.
12. $\sqrt{x+5} - \sqrt{2x+1} = \frac{4-x}{\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+1}}$ et $\sqrt{x+12} - 4 = \frac{x-4}{\sqrt{x+12}+4}$; le quotient vaut $-\frac{\sqrt{x+12}+4}{\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+1}} \rightarrow -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$.

Exercice 4

On rappelle que $\sqrt{x^2} = |x|$: pour $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$.

1. Forme $+\infty - \infty$. $\sqrt{x^2-5x} + x = \frac{(x^2-5x)-x^2}{\sqrt{x^2-5x}-x} = \frac{-5x}{-x\sqrt{1-\frac{5}{x}}-x} = \frac{5}{\sqrt{1-\frac{5}{x}}+1} \rightarrow \frac{5}{2}$.
2. $x - \sqrt{x^2+4} = \frac{-4}{x+\sqrt{x^2+4}} \rightarrow 0$.
3. Pour $x < 0$: $\sqrt{3x^2+x+2} + 5x - 1 = x \left(-\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} + 5 - \frac{1}{x} \right)$; la parenthèse tend vers $5 - \sqrt{3} > 0$, donc la limite est $-\infty$.

4. $\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - 2x = \frac{-3x+1}{\sqrt{4x^2-3x+1}+2x} = \frac{-3+\frac{1}{x}}{\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+2} \rightarrow -\frac{3}{4}$; la limite vaut $-\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4}$.
5. Pour $x < 0$: $\sqrt{x^2 + 6x - 1} + x = \frac{6x-1}{\sqrt{x^2+6x-1}-x} = \frac{6x-1}{-x\left(\sqrt{1+\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}}+1\right)} \rightarrow \frac{6}{-2} = -3$; la limite vaut $-3 + 2 = -1$.
6. De même $\sqrt{9x^2 + 12x - 5} + 3x = \frac{12x-5}{-3x\left(\sqrt{1+\frac{4}{3x}-\frac{5}{9x^2}}+1\right)} \rightarrow -2$; la limite vaut $-2 - 1 = -3$.
7. $\sqrt{x + 2\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}+1} \rightarrow 1$.
8. $x\left(\sqrt{3+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)$; la parenthèse tend vers $\sqrt{3} - 1 > 0$, la limite est $+\infty$.
9. $\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x}}\right)}{x\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} \rightarrow \frac{1}{2}$.
10. Numérateur : $\sqrt{x^2 + 3x} + x = \frac{3x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1\right)} \rightarrow -\frac{3}{2}$. Dénominateur : $-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 3x \rightarrow +\infty$. La limite est 0.
11. $\frac{x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)} \rightarrow 2$ (pour $x > 0$).
12. Pour $x < 0$: $\frac{-x\sqrt{9+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}}{2x} \rightarrow -\frac{3}{2}$.
13. On divise par $\sqrt{x}$: $\frac{\sqrt{4-\frac{1}{x}}-1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} \rightarrow \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$.
14. $\frac{\sqrt{x^3+1}}{x^2-x+2} = \frac{x\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} \rightarrow 0$.

Exercice 5

En $\pm\infty$, un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré, et une fraction rationnelle la même limite que le quotient des termes de plus haut degré.

1. $\lim_{-\infty}(-3x^5) = +\infty$. 2. $\lim_{+\infty}(-4x^4) = -\infty$. 3. $(-2)^3 + 2(-2)^2 - 5 = -5$. 4. $\lim_{+\infty}(-x^6) = -\infty$.
 5. $\lim_{-\infty} \frac{2x^2}{x^3} = \lim_{-\infty} \frac{2}{x} = 0$. 6. $\frac{5x^3}{2x^3} = \frac{5}{2}$. 7. $\frac{x^4}{3x} = \frac{x^3}{3} \rightarrow -\infty$. 8. $\frac{-4x^3}{2x^2} = -2x \rightarrow +\infty$.
 9. $\frac{6x^7}{-3x^4} = -2x^3 \rightarrow +\infty$. 10. $\frac{3x^4}{6x^4} = \frac{1}{2}$.
 11. Forme déterminée : $\frac{1+3}{9} = \frac{4}{9}$.
 12. Numérateur $\rightarrow \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{5}{4}$, dénominateur $(2x+1)^2 \rightarrow 0^+$: la limite est $-\infty$.
 13. $\frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}$. 14. $\frac{x^2+1}{4x^2+x+1} \rightarrow \frac{1}{4}$, d'où la limite $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

Exercice 6

1. $\frac{\sin 5x}{2x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} \rightarrow \frac{5}{2}$. 2. $\frac{1-\cos 6x}{x^2} = 36 \cdot \frac{1-\cos 6x}{(6x)^2} \rightarrow 18$.
 3. $\frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \left(\frac{x}{\tan x}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2}$. 4. $\frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot x \rightarrow \frac{1}{2} \times 1 \times 0 = 0$.
 5. $27\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^3 \rightarrow 27$. 6. $\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3}{x^2}$: forme $1 \times (+\infty)$, la limite est $+\infty$.
 7. On pose $X = x - 2 \rightarrow 0$: $\frac{\tan X}{X} \cdot \frac{1}{x+2} \rightarrow \frac{1}{4}$. 8. $\frac{\sin 7x}{7x} \cdot \frac{3x}{\tan 3x} \cdot \frac{7}{3} \rightarrow \frac{7}{3}$.
 9. $4 \cdot \frac{1-\cos 2x}{(2x)^2} \cdot \frac{x}{\tan x} \rightarrow 4 \times \frac{1}{2} = 2$. 10. On pose $X = \frac{3}{x} \rightarrow 0^+$: $x \sin \frac{3}{x} = 3 \frac{\sin X}{X} \rightarrow 3$.
 11. $\frac{\tan 2x}{2x} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1-\cos x}{x^2}\right) \rightarrow 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.
 12. Pour $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$: $\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 13. $\frac{x}{\tan x} \left(2 + 3\frac{\sin 3x}{3x}\right) \rightarrow 2 + 3 = 5$.

14. Numérateur $\rightarrow 1 - 3 = -2$; pour $x \in]0; \pi[$, $\sin x > 0$, donc $\sin x \rightarrow 0^+$: la limite est $-\infty$.
15. Encadrement : $\cos x \geq -1$, donc $x^2 - 2x + \cos x \geq x^2 - 2x - 1$ et $\lim_{+\infty}(x^2 - 2x - 1) = +\infty$: la limite est $+\infty$.
16. $\left| \frac{\sin x}{x^2+1} \right| \leq \frac{1}{x^2+1}$ et $\frac{1}{x^2+1} \rightarrow 0$: la limite est 0.
17. $\frac{\cos x - 1}{x} + \sqrt{3} \frac{\sin x}{x} = -x \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} + \sqrt{3} \frac{\sin x}{x} \rightarrow 0 + \sqrt{3} = \sqrt{3}$.
18. $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$. Avec $h = x - \frac{\pi}{6} \rightarrow 0$: $\frac{2(\cos h - 1)}{h} = -2h \cdot \frac{1 - \cos h}{h^2} \rightarrow 0$.
19. Avec $h = x - \frac{\pi}{6}$: $2 \sin\left(h + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = \sqrt{3} \sin h + \cos h - 1$, donc l'expression vaut $\sqrt{3} \frac{\sin h}{h} - h \frac{1 - \cos h}{h^2} \rightarrow \sqrt{3}$.
20. Avec $h = x - \frac{\pi}{2}$: $\sin x = \cos h$ et $\pi - 2x = -2h$: $\frac{1 - \cos h}{4h^2} \rightarrow \frac{1}{8}$.
21. Avec $h = x - \frac{\pi}{4}$: $\tan x - 1 = \frac{1 + \tan h}{1 - \tan h} - 1 = \frac{2 \tan h}{1 - \tan h}$ et $4x - \pi = 4h$: $\frac{\tan h}{h} \cdot \frac{1}{2(1 - \tan h)} \rightarrow \frac{1}{2}$.

Exercice 7

1. $2x - 1 < E(2x) \leq 2x$; pour $x > 0$: $2 - \frac{1}{x} < \frac{E(2x)}{x} \leq 2$. Par encadrement, la limite est 2.
2. $E(x) + \cos x \leq x + 1$ et $x + 1 \rightarrow -\infty$: la limite est $-\infty$.
3. Pour $x < -1$: $\frac{1}{x} \in]-1; 0[$, donc $E\left(\frac{1}{x}\right) = -1$ et $x^3 E\left(\frac{1}{x}\right) = -x^3 \rightarrow +\infty$.
4. Pour $x > 0$: $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$, donc $1 - x < x E\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$. Par encadrement, la limite est 1.
5. Pour $x \in]-1; 0[$: $E(x) = -1$, l'expression vaut $\frac{-3 + (x+1)^2}{x(x+1)} = \frac{x^2 + 2x - 2}{x(x+1)}$: forme $\frac{-2}{0^-}$, la limite est $+\infty$.
6. $0 \leq x - E(x) < 1$, donc $0 \leq \frac{\sqrt{x - E(x)}}{x} \leq \frac{1}{x}$ pour $x > 0$: la limite est 0.
7. Pour $0 < x < 1$: $E(x^2) = 0$, l'expression vaut -1 : la limite est -1 .
8. $x^2 - 1 < E(x^2) \leq x^2$ donc $1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} < \frac{E(x^2) + x}{x^2} \leq 1 + \frac{1}{x}$: la limite est 1.
9. Pour $4 < x < 5$: $E(x) = 4$, l'expression vaut $\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \rightarrow \frac{1}{4}$.

Exercice 8

1. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x \neq -3$: $\left| \frac{3x-1}{x+3} - 1 \right| = \frac{2|x-2|}{|x+3|}$. Si $|x-2| < 1$, alors $x+3 > 4$, d'où $|f(x) - 1| < \frac{|x-2|}{2}$. On pose $\alpha = \min(1; 2\varepsilon)$: pour tout x tel que $|x-2| < \alpha$, on a $|f(x) - 1| < \frac{\alpha}{2} \leq \varepsilon$. Donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x < -3$: $|f(x) - 3| = \frac{10}{|x+3|} = \frac{10}{-x-3}$. On pose $B = 3 + \frac{10}{\varepsilon}$; si $x < -B$, alors $-x-3 > \frac{10}{\varepsilon}$, donc $|f(x) - 3| < \varepsilon$.
3. Soit $A > 0$. Pour $x \leq -3$: $0 < 3 - x \leq -2x$, donc $\frac{x^2+1}{3-x} \geq \frac{x^2}{-2x} = -\frac{x}{2}$, c'est-à-dire $f(x) \leq \frac{x}{2}$. On pose $B = \max(3; 2A)$: si $x < -B$, alors $f(x) \leq \frac{x}{2} < -A$.
4. Soit $A > 0$. Pour $-3 < x < -2$: $1 - 2x > 5$ et $x+3 > 0$, donc $f(x) > \frac{5}{x+3}$. On pose $\alpha = \min\left(1; \frac{5}{A}\right)$: si $0 < x+3 < \alpha$, alors $\frac{5}{x+3} > \frac{5}{\alpha} \geq A$, donc $f(x) > A$.

Exercice 9

1. $\lim_{+\infty} f = 2$; $\lim_{-\infty} f = -\infty$ (car $f(x) = (2x-1) + (f(x) - (2x-1))$ avec $2x-1 \rightarrow -\infty$); $\lim_{0^+} f = -\infty$; $\lim_{0^-} f = +\infty$. $\frac{f(x)}{x} = \frac{2x-1}{x} + \frac{f(x)-(2x-1)}{x} \rightarrow 2$; $f(x) - 2x = -1 + (f(x) - (2x-1)) \rightarrow -1$; $\frac{f(x)-2}{x} \rightarrow \frac{0}{+\infty} = 0$; $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$ (forme $\frac{2}{+\infty}$).
2. La courbe coupe l'axe des abscisses en $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 1$: $S = \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$. Elle coupe la droite $y = -2$ en $x = -1$ et $x = \frac{1}{2}$: $S = \left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$.
3. Sur $]0; +\infty[$, la courbe reste sous la droite $y = 2$: pas de solution. Sur $]-\infty; 0[$, la courbe monte de $-\infty$ à $+\infty$ et coupe une seule fois la droite $y = 3$: l'équation a **une** solution.
4. a. $g(x)$ existe si et seulement si $f(x) \geq 0$: $D_g = \left[-\frac{1}{2}; 0\right] \cup [1; +\infty[$.
4. b. $\lim_{+\infty} g = \sqrt{2}$; $\lim_{0^-} g = +\infty$ (car $f(x) \rightarrow +\infty$); $\frac{g(x)}{x} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{+\infty} = 0$.

Exercice 10

1. Pour $x > 0$: $f(x) = \frac{x\left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}\right)}{x\left(1 + \frac{3}{x}\right)} \rightarrow \frac{0-2}{1} = -2$.
2. $\lim_{0^+} f(x) = \frac{0-1}{3} = -\frac{1}{3}$ (forme déterminée). Pour $x \rightarrow 0^-$: $\sin x - \sqrt{3 + \cos x} \rightarrow -2$ et $x \rightarrow 0^-$: forme $\frac{-2}{0^-}$, donc $\lim_{0^-} f = +\infty$. Les limites à droite et à gauche sont différentes : f n'admet pas de limite en 0.
3. a. Soit $x < 0$. $|\sin x| \leq 1$ et $0 \leq \sqrt{3 + \cos x} \leq \sqrt{4} = 2$, donc par l'inégalité triangulaire $|\sin x - \sqrt{3 + \cos x}| \leq 3$, d'où $|f(x)| \leq \frac{3}{|x|}$.
3. b. $\frac{3}{|x|} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow -\infty$; d'après la propriété « limite et ordre », $\lim_{-\infty} f = 0$.

Exercice 11

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \neq 1$: $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$, donc $\frac{x^n - 1}{x - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$, polynôme dont la limite en 1 est $\sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$.
2. $\sum_{k=1}^n x^k - n = \sum_{k=1}^n (x^k - 1)$. Pour x voisin de 1, $x \neq 1$:

$$\frac{\sum_{k=1}^n x^k - n}{\sin(2x - 2)} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{x^k - 1}{x - 1} \right) \cdot \frac{2x - 2}{\sin(2x - 2)} \cdot \frac{1}{2}.$$

D'après 1 la somme tend vers $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$; avec $X = 2x - 2 \rightarrow 0$, $\frac{X}{\sin X} \rightarrow 1$. La limite est $\frac{n(n+1)}{4}$.

Exercice 12

1. Pour $x > 1$: $\sqrt{x}$ et $\sqrt{x+8}$ existent et $\sqrt{x+8} > 3$, donc $3 - \sqrt{x+8} \neq 0$: $f(x)$ existe. Pour $x < 1$: $1 - x > 0$ et $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$ s'annule seulement pour $x = -2$ (et $x = 1$, exclu). En $x = 1$, f n'est pas définie. Donc $D_f =]-\infty; -2[\cup]-2; 1[\cup]1; +\infty[$.
2. En $+\infty$: on divise par $\sqrt{x}$: $f(x) = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{3}{\sqrt{x}} - \sqrt{1 + \frac{8}{x}}} \rightarrow -1$. En $-\infty$: $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$ et $\frac{\sqrt{1-x}}{x^2} = \sqrt{\frac{1-x}{x^4}} \rightarrow 0$: la limite est 0.
3. Pour $x > 1$: $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{3+\sqrt{x+8}}{1-x} = -\frac{3+\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+1}} \rightarrow -3$. Pour $x < 1$, $x \neq -2$: $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)(x+2)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x}(x+2)}$: forme $\frac{-1}{0^+}$, $\lim_{1^-} f = -\infty$. Les deux limites sont différentes : f n'a pas de limite en 1.
4. $\sqrt{1-x} \rightarrow \sqrt{3}$ et $(x-1)(x+2)$ tend vers 0^- quand $x \rightarrow -2^+$ et vers 0^+ quand $x \rightarrow -2^-$. Donc $\lim_{-2^+} f = -\infty$ et $\lim_{-2^-} f = +\infty$: f n'a pas de limite en -2 .

Exercice 13

1. a. Soit $x > 0$. On a $2x - 1 < E(2x) \leq 2x$; en multipliant par $x > 0$: $2x^2 - x < xE(2x) \leq 2x^2$, puis en ajoutant 1 et en divisant par $x^2 + 1 > 0$ on obtient l'encadrement demandé.
1. b. Les deux fractions encadrantes tendent vers 2 en $+\infty$; d'après la propriété des gendarmes, $\lim_{+\infty} f = 2$.
2. Soit $x < 0$: en multipliant $2x - 1 < E(2x) \leq 2x$ par $x < 0$, l'ordre change : $2x^2 \leq xE(2x) < 2x^2 - x$, d'où $\frac{2x^2+1}{x^2+1} \leq f(x) < \frac{2x^2-x+1}{x^2+1}$. Les deux bornes tendent vers 2 : $\lim_{-\infty} f = 2$.

Exercice 14

1. On pose $h = x - 1 \rightarrow 0$: $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi h}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \frac{\pi h}{2}}$, donc $(x - 1) \tan \frac{\pi x}{2} = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\frac{\pi h}{2}}{\tan \frac{\pi h}{2}} \rightarrow -\frac{2}{\pi}$.
2. $\sqrt{x^2 + 4x + 1} - x = \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+4x+1}+x} = \frac{4+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} \rightarrow 2$; la limite vaut $\frac{2027}{2}$.
3. $2 - \sqrt{x+5} = \frac{-(x+1)}{2+\sqrt{x+5}}$ et $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, donc l'expression vaut $\frac{-1}{(2+\sqrt{x+5})(x-3)} \rightarrow \frac{-1}{4 \times (-4)} = \frac{1}{16}$.
4. $x\sqrt{x+5} + 4 = \frac{x^2(x+5)-16}{x\sqrt{x+5}-4} = \frac{(x+4)(x^2+x-4)}{x\sqrt{x+5}-4}$ et $x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3)$. La limite vaut $\frac{16-4-4}{(-4-4)(-7)} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$.
5. On pose $u = \frac{\pi}{x^2+3} \rightarrow 0$: $(1 - 4x^2) \tan u = \frac{\pi(1-4x^2)}{x^2+3} \cdot \frac{\tan u}{u} \rightarrow -4\pi \times 1 = -4\pi$.

6. On pose $a = 2x - 1$, $a - 1 = 2(x - 1) : 3 - 3a^5 = -3(a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) = -6(x - 1)(a^4 + \dots + 1)$.
L'expression vaut $\frac{-6(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)}{x+1} \rightarrow \frac{-6 \times 5}{2} = -15$.

Exercice 15

1. *Raisonnement par récurrence.* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P(n) : \ll \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^n(ax)}{x^2} = \frac{na^2}{2} \gg$.
 - *Initialisation* : pour $n = 1$, on a $\frac{1 - \cos(ax)}{x^2} = a^2 \cdot \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} \rightarrow \frac{a^2}{2}$. Donc $P(1)$ est vraie.
 - *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P(n)$ est vraie (hypothèse de récurrence), montrons que $P(n + 1)$ est vraie. On a

$$1 - \cos^{n+1}(ax) = (1 - \cos^n(ax)) + \cos^n(ax)(1 - \cos(ax)),$$
 donc $\frac{1 - \cos^{n+1}(ax)}{x^2} = \frac{1 - \cos^n(ax)}{x^2} + \cos^n(ax) \cdot \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} \rightarrow \frac{na^2}{2} + 1 \times \frac{a^2}{2} = \frac{(n+1)a^2}{2}$. Donc $P(n + 1)$ est vraie.
 - *Conclusion* : d'après le principe du raisonnement par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^n(ax)}{x^2} = \frac{na^2}{2}$.
2. $\frac{1 - \cos^4(2x)}{1 - \cos \frac{x}{2}} = \frac{1 - \cos^4(2x)}{x^2} \cdot \frac{x^2}{1 - \cos \frac{x}{2}}$. D'après 1 (avec $n = 4$, $a = 2$) le premier facteur tend vers 8 ; d'après 1 (avec $n = 1$, $a = \frac{1}{2}$) $\frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{x^2} \rightarrow \frac{1}{8}$. La limite vaut $8 \times 8 = 64$.