

Corrigé détaillé de la série — Chapitre 08

Trigonométrie (calcul trigonométrique)

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — méthodes utilisées

- **Formules** : addition et duplication (1 à 6), linéarisation (7, 8), tangente (9 à 11), produits $\leftrightarrow$ sommes (12, 13), $a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \alpha)$ (14).
- **Équations** : se ramener à $\cos X = \cos \alpha$, $\sin X = \sin \alpha$ ou $\tan X = \tan \alpha$ (15), ou à un produit nul ; **inéquations** : cercle trigonométrique ou tableau de signes (16).
- Pour les solutions dans un intervalle, on encadre l'entier k .
- Tous les calculs (identités, solutions, signes) ont été contrôlés avec Python/sympy (`build/verif_lot4.py`).

Exercice 1

1. **a.** *Méthode 1* : $\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$ et $\cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$; la somme des trois termes vaut $\cos x - \cos x = 0$. *Méthode 2* : $\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 2\cos(x + \pi)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\cos x$.
1. **b.** *Méthode 1* : $\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ et $\sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$: la somme vaut 0. *Méthode 2* : $\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 2\sin(x + \pi)\cos\frac{\pi}{3} = -\sin x$.
2. **a.** $\frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a = \frac{5}{4}$ et $\cos a > 0$: $\cos a = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, puis $\sin a = \tan a \cos a = \frac{\sqrt{5}}{5}$. De même $\frac{1}{\cos^2 b} = \frac{10}{9}$: $\cos b = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ et $\sin b = \frac{\sqrt{10}}{10}$.
2. **b.** $\sin(a + b) = \frac{1 \times 3 + 2 \times 1}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos(a + b) = \frac{2 \times 3 - 1 \times 1}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $a + b \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$; or $a + b \in]0; \pi[$, d'où $a + b = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 2

1. On pose $t = \tan x$; les hypothèses donnent $t^2 \neq 1$. $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1+t}{1-t}$ et $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1-t}{1+t}$, donc

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{(1+t)^2 - (1-t)^2}{1-t^2} = \frac{4t}{1-t^2} = 2 \times \frac{2t}{1-t^2} = 2 \tan 2x.$$

2. $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \neq 0$, donc $\sin \frac{x}{2} \neq 0$ et $\cos \frac{x}{2} \neq 0$. Avec $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$: $\frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2 \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}}$.

Exercice 3

1. $A(x) = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)$; $B(x) = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x)$; $C(x) = -\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}\cos 2x$; $D(x) = \frac{1}{2}(\sin(3x + \frac{\pi}{6}) - \sin(x - \frac{\pi}{2})) = \frac{1}{2}(\sin(3x + \frac{\pi}{6}) + \cos x)$.
2. $E(x) = 2 \cos 4x \sin x$. $F(x) = (\sin x + \sin 7x) + (\sin 3x + \sin 5x) = 2 \sin 4x \cos 3x + 2 \sin 4x \cos x = 2 \sin 4x(\cos 3x + \cos x) = 4 \sin 4x \cos 2x \cos x$.
3. $\cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12} = -2 \sin \frac{\pi}{4} \sin(-\frac{\pi}{6}) = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}(\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Exercice 4

1. $A\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{6} - \sin^2 0 = \frac{3}{4}$; $A\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{3} - \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$.
2. $2 \cos^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 1 + \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x$; $2 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 1 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x$.

3. Par différence : $2A(x) = \sqrt{3} \cos 2x$, donc $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x$. (Contrôle : $A(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}$.)

4. $A(x) = \frac{3}{4} \iff \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff 2x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi \iff x = \pm \frac{\pi}{12} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Exercice 5

1. $\cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \cos 2x \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = \cos x (\cos 2x - (1 - \cos 2x)) = \cos x (2 \cos 2x - 1)$.
 $\sin 3x = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = \sin x (2 \cos^2 x + \cos 2x) = \sin x (2 \cos 2x + 1)$.

2. On divise numérateur et dénominateur par $\cos x \cos y \neq 0$: $\frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\cos x \cos y + \sin x \sin y} = \frac{1 - \tan x \tan y}{1 + \tan x \tan y}$.

3. $\tan x + \tan y = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$ et $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$, d'où l'égalité.

4. $\cos(x+y) \cos(x-y) = (\cos x \cos y)^2 - (\sin x \sin y)^2$ (produit d'une somme et d'une différence). En divisant par $\cos^2 x \cos^2 y : 1 - \tan^2 x \tan^2 y$.

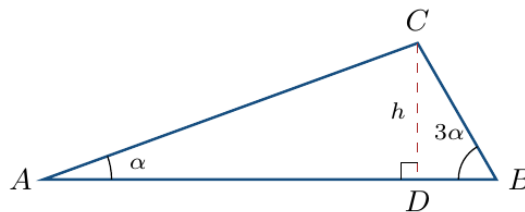
Exercice 6

1. Les angles $\widehat{BAC} = \alpha$ et $\widehat{ABC} = 3\alpha$ sont aigus ($3\alpha < \frac{\pi}{2}$); le pied D de la hauteur issue de C est donc sur le segment $]AB[$. Comme $\alpha \in]0; \frac{\pi}{6}[$ et que $\tan$ est strictement croissante sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$: $0 < \tan \alpha < \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. Dans les triangles rectangles ADC et BDC : $\tan \alpha = \frac{h}{AD}$ et $\tan 3\alpha = \frac{h}{DB}$. Donc $AB = AD + DB = \frac{h}{\tan \alpha} + \frac{h}{\tan 3\alpha}$ et $\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan 3\alpha} = \frac{AB}{h}$.

3. Avec $t = \tan \alpha$ ($0 < t^2 < \frac{1}{3}$) : $\tan 2\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$ et $\tan 3\alpha = \frac{\frac{2t}{1-t^2} + t}{1 - \frac{2t^2}{1-t^2}} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$. Alors

$$\frac{AB}{h} = \frac{1}{t} + \frac{1 - 3t^2}{t(3 - t^2)} = \frac{4 - 4t^2}{t(3 - t^2)}, \quad \text{donc} \quad h = AB \times \frac{t(3 - t^2)}{4(1 - t^2)}.$$



Exercice 7

1. $\cos 2A + \cos 2B = 2 \cos(A+B) \cos(A-B) = -2 \cos C \cos(A-B)$ et $\cos 2C = 2 \cos^2 C - 1 = -2 \cos C \cos(A+B) - 1$. Donc la somme vaut $-1 - 2 \cos C (\cos(A-B) + \cos(A+B)) = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C$.

2. Aucun angle n'est droit, donc $\cos A \cos B \cos C \neq 0$. $A + B = \pi - C$ et $\cos(A+B) = -\cos C \neq 0$, d'où $\tan(A+B) = -\tan C$, soit $\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$ (le dénominateur vaut $\frac{\cos(A+B)}{\cos A \cos B} \neq 0$). En chassant le dénominateur : $\tan A + \tan B = -\tan C + \tan A \tan B \tan C$.

Exercice 8

1. $(E_1) \iff \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{3\pi}{4} \iff 2x - \frac{\pi}{3} = \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \iff x = \frac{13\pi}{24} + k\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{24} + k\pi$. Dans $[0; 2\pi[$: $\left\{ \frac{13\pi}{24}; \frac{19\pi}{24}; \frac{37\pi}{24}; \frac{43\pi}{24} \right\}$.

2. $-\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = 2 \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$ ($r = 2$, $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$). $(E_2) \iff \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff 2x - \frac{2\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi \iff x = \frac{11\pi}{24} + k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{24} + k\pi$. Dans $[-\pi; \pi[$: $\left\{ -\frac{19\pi}{24}; -\frac{13\pi}{24}; \frac{5\pi}{24}; \frac{11\pi}{24} \right\}$.

3. $\sin x + \sin 4x = 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2}$ et $\sin 2x + \sin 3x = 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2}$, donc le premier membre vaut

$2 \sin \frac{5x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) = 4 \sin \frac{5x}{2} \cos x \cos \frac{x}{2}$. Ainsi $(E_3) \iff \sin \frac{5x}{2} = 0$ ou $\cos x = 0$ ou $\cos \frac{x}{2} = 0$:

$$S_3 = \left\{ \frac{2k\pi}{5} ; \frac{\pi}{2} + k\pi ; \pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4. Avec $t = \tan x : t^2 + (1 - \sqrt{3})t - \sqrt{3} = (t - \sqrt{3})(t + 1)$. $(E_4) \iff \tan x = \sqrt{3}$ ou $\tan x = -1 \iff x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. Dans $[-3\pi; -\pi[: \left\{ -\frac{8\pi}{3}; -\frac{9\pi}{4}; -\frac{5\pi}{3}; -\frac{5\pi}{4} \right\}$.

Exercice 9

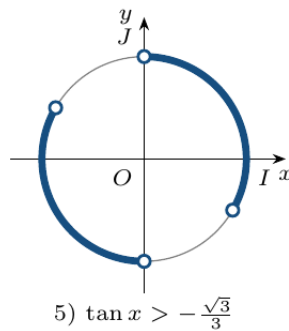
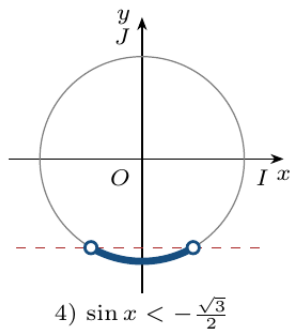
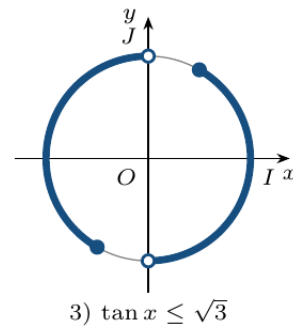
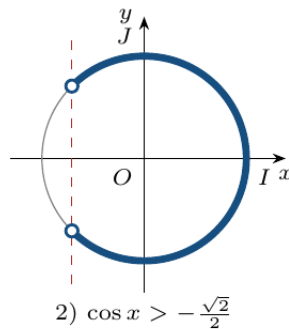
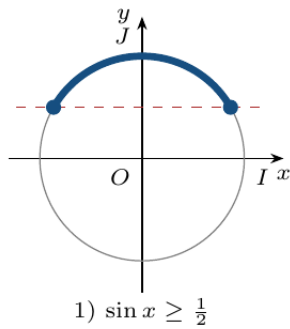
1. $\sin x = \frac{1}{2}$ pour $x \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\} : S = \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$.

2. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x \in \left\{ \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\} : S = \left[0; \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}; 2\pi \right]$.

3. On exclut $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. Sur $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[: x \leq \frac{\pi}{3}$; sur $\left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[: x \leq \frac{4\pi}{3}$; sur $\left] \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right[: \tan x \leq 0$, toujours vrai. $S = \left[0; \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right]$.

4. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x \in \left\{ \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\} : S = \left[\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right]$.

5. On exclut $\pm \frac{\pi}{2}$. Sur $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2} \right[: \tan x \geq 0$: toujours vrai; sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[: x > -\frac{\pi}{6}$; sur $\left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[: x > \frac{5\pi}{6}$. $S = \left[-\pi; -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; \pi \right]$.

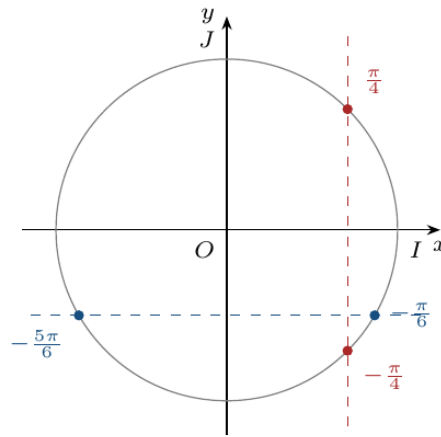


Exercice 10

1. $A\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) = 0$; $A\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2 \cos \frac{\pi}{6} - \sqrt{2}(-1 + 1) = -\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$.

2. $(2 \cos x - \sqrt{2})(2 \sin x + 1) = 4 \sin x \cos x + 2 \cos x - 2\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} = 2 \sin 2x + 2 \cos x - \sqrt{2}(2 \sin x + 1) = A(x)$.

3. $A(x) = 0 \iff \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\sin x = -\frac{1}{2}$. Dans $] -\pi; \pi[: S = \left\{ -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4} \right\}$.



4. $2 \cos x - \sqrt{2} > 0 \iff x \in]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$ et $2 \sin x + 1 > 0 \iff x \in]-\pi; -\frac{5\pi}{6}[\cup]-\frac{\pi}{6}; \pi[$ (sur $] -\pi; \pi[$).

x	$] -\pi; -\frac{5\pi}{6}[$	$] -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{4}[$	$] -\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{6}[$	$] -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}[$	$] \frac{\pi}{4}; \pi[$
$2 \cos x - \sqrt{2}$	–	–	+	+	–
$2 \sin x + 1$	+	–	–	+	+
$A(x)$	–	+	–	+	–

Exercice 11

1. $A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - 1 + 0 - 0 = 1$; $A\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. $2 \sin^3 x - \sin x = \sin x (2 \sin^2 x - 1) = -\sin x \cos 2x$; $2 \cos x - 2 \cos^3 x = 2 \cos x \sin^2 x = \sin x (2 \sin x \cos x) = \sin x \sin 2x$.
3. $A(x) = \sin x (\sin 2x - \cos 2x)$ et $\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2} (\sin 2x \cos \frac{\pi}{4} - \cos 2x \sin \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \sin (2x - \frac{\pi}{4})$. (Contrôle : $A\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \sin \frac{3\pi}{4} = 1$.)
4. $A(x) = 0 \iff \sin x = 0$ ou $\sin (2x - \frac{\pi}{4}) = 0 \iff x = k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).
5. Sur $[0; \pi]$, $\sin x \geq 0$, avec égalité seulement en 0 et π . Pour $x \in]0; \pi[$: $A(x) \geq 0 \iff \sin (2x - \frac{\pi}{4}) \geq 0$; or $2x - \frac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}[$, et sur cet intervalle $\sin X \geq 0 \iff X \in [0; \pi]$, soit $x \in [\frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}]$. Conclusion : $S = \{0\} \cup [\frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}] \cup \{\pi\}$.

Exercice 12

1. $2 \sin^2 (x + \frac{\pi}{4}) - 1 = -\cos (2x + \frac{\pi}{2}) = \sin 2x$.
2. $4 \sin^2 (x + \frac{\pi}{4}) = 3 \iff 2 \sin^2 (x + \frac{\pi}{4}) - 1 = \frac{1}{2} \iff \sin 2x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
3. a. $(3 - \sin x)(1 - 4 \sin^2 x) = 3 - 12 \sin^2 x - \sin x + 4 \sin^3 x = A(x)$.
3. b. $\sin x \leq 1 < 3$.
3. c. D'après a et b : $A(x) = 0 \iff \sin^2 x = \frac{1}{4} \iff \sin x = \frac{1}{2}$ ou $\sin x = -\frac{1}{2} \iff x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Exercice 13

1. a. $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = 6 + 2\sqrt{12} + 2 = 8 + 4\sqrt{3}$.
1. b. $\Delta = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 + 8\sqrt{3} = 8 - 4\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 8 + 4\sqrt{3} = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2$. Solutions : $X = \frac{-(\sqrt{6}-\sqrt{2})+(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $X = \frac{-(\sqrt{6}-\sqrt{2})-(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$.
2. a. $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x$, donc $\sin 2x = (\cos x + \sin x)^2 - 1$.
2. b. Avec $X = \cos x + \sin x$: $A(x) = 2X^2 - 2 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})X + 2 - \sqrt{3} = 2X^2 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})X - \sqrt{3}$. Donc $A(x) = 0 \iff X = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $X = -\frac{\sqrt{6}}{2}$. Or $X = \sqrt{2} \cos (x - \frac{\pi}{4})$:

- $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, soit $x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$;
 — $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, soit $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi$.

3. a. On pose $\theta = x - \frac{\pi}{4}$. $A(x) = 2\left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 4(\cos\theta - \cos\frac{\pi}{3})(\cos\theta + \cos\frac{\pi}{6})$. Or $\cos\theta - \cos\frac{\pi}{3} = -2\sin\frac{\theta+\frac{\pi}{3}}{2}\sin\frac{\theta-\frac{\pi}{3}}{2}$ et $\cos\theta + \cos\frac{\pi}{6} = 2\cos\frac{\theta+\frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{\theta-\frac{\pi}{6}}{2}$, avec $\frac{\theta+\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{24}$, $\frac{\theta-\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{x}{2} - \frac{7\pi}{24}$, $\frac{\theta+\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{24}$, $\frac{\theta-\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{x}{2} - \frac{5\pi}{24}$. D'où la formule annoncée.

3. b. Pour $x \in [0; \frac{7\pi}{12}]$: $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{24} \in [\frac{\pi}{24}; \frac{\pi}{3}]$ (sinus > 0) ; $\frac{x}{2} - \frac{7\pi}{24} \in [-\frac{7\pi}{24}; 0]$ (sinus ≤ 0 , nul seulement pour $x = \frac{7\pi}{12}$) ; $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{24} \in [-\frac{\pi}{24}; \frac{\pi}{4}]$ et $\frac{x}{2} - \frac{5\pi}{24} \in [-\frac{5\pi}{24}; \frac{\pi}{12}]$ (cosinus > 0). Donc $A(x) \geq 0$ sur $[0; \frac{7\pi}{12}]$, et $A(x) = 0$ seulement pour $x = \frac{7\pi}{12}$.

Exercice 14

- 1.** $\cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.
2. $4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 3\cos x - 1 = (4\cos^3 x - 3\cos x) + (2\cos^2 x - 1) = \cos 3x + \cos 2x$. Donc $(E) \iff \cos 3x = \cos(\pi - 2x) \iff 3x = \pi - 2x + 2k\pi$ ou $3x = -\pi + 2x + 2k\pi \iff x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}$ ou $x = -\pi + 2k\pi$. La seconde famille est contenue dans la première ($-\pi + 2k\pi = \frac{\pi}{5} + \frac{2(5k-3)\pi}{5}$) : $S = \left\{\frac{(2k+1)\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. $0 \leq \frac{(2k+1)\pi}{5} \leq 2\pi \iff k \in \{0; 1; 2; 3; 4\} : \left\{\frac{\pi}{5}; \frac{3\pi}{5}; \pi; \frac{7\pi}{5}; \frac{9\pi}{5}\right\}$.
4. a. $4(-1)^3 + 2(-1)^2 - 3(-1) - 1 = 0$. Puis $4X^3 + 2X^2 - 3X - 1 = (X+1)(4X^2 - 2X - 1)$ et $4X^2 - 2X - 1 = 0 \iff X = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Solutions : $-1, \frac{1-\sqrt{5}}{4}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.
4. b. $\frac{\pi}{5}$ est solution de (E) (question 2), donc $X = \cos \frac{\pi}{5}$ vérifie (F) .
4. c. $\frac{\pi}{5} \in]0; \frac{\pi}{2}[$, donc $\cos \frac{\pi}{5} > 0$; les solutions -1 et $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ sont négatives. Donc $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 15

- 1.** $\cos 4x = \cos 3x \iff 4x = 3x + 2k\pi$ ou $4x = -3x + 2k\pi \iff x = 2k\pi$ ou $x = \frac{2k\pi}{7}$. La première famille est contenue dans la seconde : $S = \left\{\frac{2k\pi}{7} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Voir l'exercice 14 pour $\cos 3x$. $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R} : \cos 4x - \cos 3x = P(\cos x)$ avec $P(t) = 8t^4 - 4t^3 - 8t^2 + 3t + 1$. Pour $x = \frac{2k\pi}{7}$, $P(\cos x) = 0$; les valeurs de $\cos \frac{2k\pi}{7}$ ($k \in \{0; \dots; 6\}$) sont 1, $\cos \frac{2\pi}{7}$, $\cos \frac{4\pi}{7}$, $\cos \frac{6\pi}{7}$ (car $\cos \frac{8\pi}{7} = \cos \frac{6\pi}{7}$, $\cos \frac{10\pi}{7} = \cos \frac{4\pi}{7}$, $\cos \frac{12\pi}{7} = \cos \frac{2\pi}{7}$). Ces quatre réels sont distincts (cos est strictement décroissante sur $[0; \pi]$ et $0 < \frac{2\pi}{7} < \frac{4\pi}{7} < \frac{6\pi}{7} < \pi$). Un polynôme de degré 4 ayant au plus 4 racines, l'ensemble des solutions est exactement S .
4. 1 étant racine : $P(t) = (t-1)(8t^3 + 4t^2 - 4t - 1)$. Les trois autres racines de P sont celles du second facteur, de coefficient dominant 8 ; par factorisations successives :

$$P(t) = 8(t-1)\left(t - \cos \frac{2\pi}{7}\right)\left(t - \cos \frac{4\pi}{7}\right)\left(t - \cos \frac{6\pi}{7}\right).$$

5. On note c_1, c_2, c_3 ces trois cosinus. $8(t-c_1)(t-c_2)(t-c_3) = 8t^3 - 8(c_1+c_2+c_3)t^2 + 8(c_1c_2+c_1c_3+c_2c_3)t - 8c_1c_2c_3$. Par identification avec $8t^3 + 4t^2 - 4t - 1 : c_1 + c_2 + c_3 = -\frac{1}{2}$ et $c_1c_2c_3 = \frac{1}{8}$.

Exercice 16

1. $\sin \frac{x}{2} \neq 0$. Pour tout $k : 2\sin(kx)\sin \frac{x}{2} = \cos\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right)$. En sommant de $k = 1$ à n , les termes se télescopent :

$$2\sin \frac{x}{2} \sum_{k=1}^n \sin(kx) = \cos \frac{x}{2} - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) = 2\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2},$$

d'où la formule en divisant par $2\sin \frac{x}{2}$.

2. $\sin x \neq 0$ et $2\sin x \cos((2k-1)x) = \sin(2kx) - \sin((2k-2)x)$. En sommant : $2\sin x \sum_{k=1}^n \cos((2k-1)x) = \sin(2nx) - \sin 0 = \sin(2nx)$.

3. Lemme : si $\sin 2a \neq 0$ (donc $\sin a \neq 0$ et $\cos a \neq 0$), $\frac{1}{\tan a} - \frac{2}{\tan 2a} = \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\cos 2a}{\sin a \cos a} = \frac{\cos^2 a - \cos 2a}{\sin a \cos a} = \frac{\sin^2 a}{\sin a \cos a} = \tan a$.

Comme $\sin(2^{j+1}x) = 2 \sin(2^j x) \cos(2^j x)$, l'hypothèse $\sin(2^{n+1}x) \neq 0$ entraîne, de proche en proche, $\sin(2^{j+1}x) \neq 0$ pour tout $j \in \{0; \dots; n\}$: toutes les expressions sont définies. Le lemme avec $a = 2^k x$, multiplié par 2^k , donne $2^k \tan(2^k x) = \frac{2^k}{\tan(2^k x)} - \frac{2^{k+1}}{\tan(2^{k+1}x)}$; la somme de $k = 0$ à $n - 1$ est télescopique et vaut $\frac{1}{\tan x} - \frac{2^n}{\tan(2^n x)}$.