

Corrigé détaillé de la série — Chapitre 07

Suites numériques

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — méthodes utilisées

- **Récurrence** pour les encadrements de suites récurrentes ; on factorise $u_{n+1} - a$ pour faire apparaître $u_n - a$.
- **Monotonie** : signe de $u_{n+1} - u_n$ (forme factorisée) ou comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
- **Suites auxiliaires** : on calcule v_{n+1} en fonction de u_n , puis on reconnaît $v_n + r$ ou $q v_n$; on « inverse » la relation $v_n = g(u_n)$ pour exprimer u_n .
- **Sommes** : $(n - p + 1) \frac{u_p + u_n}{2}$ (arithmétique), $u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$ (géométrique, $q \neq 1$).
- Tous les calculs ont été contrôlés avec Python/sympy (build/verif_lot4.py).

Exercice 1

$$1. u_1 = \frac{15 - 4}{4} = \frac{11}{4} ; u_2 = \frac{55/4 - 4}{15/4} = \frac{39}{15} = \frac{13}{5}.$$

2. $P(n)$: « $u_n > 2$ ». Initialisation : $u_0 = 3 > 2$. Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 2$. Alors $u_n + 1 > 0$ (donc u_{n+1} est défini) et

$$u_{n+1} - 2 = \frac{5u_n - 4 - 2u_n - 2}{u_n + 1} = \frac{3(u_n - 2)}{u_n + 1} > 0.$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.

$$3. \text{ a. Pour tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n - 4 - u_n^2 - u_n}{u_n + 1} = \frac{-(u_n^2 - 4u_n + 4)}{u_n + 1} = -\frac{(u_n - 2)^2}{u_n + 1}.$$

3. b. $(u_n - 2)^2 > 0$ (car $u_n \neq 2$) et $u_n + 1 > 0$: $u_{n+1} - u_n < 0$. La suite (u_n) est strictement décroissante.

3. c. Une suite décroissante est majorée par son premier terme : $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \leq u_0 = 3$. Avec 2 : $(\forall n \in \mathbb{N}) 2 < u_n \leq 3$.

$$4. \text{ a. } v_0 = \frac{1}{3 - 2} = 1 ; v_1 = \frac{1}{11/4 - 2} = \frac{4}{3}.$$

4. b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ ($u_n \neq 2$) : $u_{n+1} - 2 = \frac{3(u_n - 2)}{u_n + 1}$, donc

$$v_{n+1} = \frac{u_n + 1}{3(u_n - 2)} = \frac{(u_n - 2) + 3}{3(u_n - 2)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{u_n - 2} = v_n + \frac{1}{3}.$$

(v_n) est arithmétique de raison $r = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

$$4. \text{ c. } v_n = 1 + \frac{n}{3} = \frac{n + 3}{3}. \text{ Comme } u_n - 2 = \frac{1}{v_n} : u_n = 2 + \frac{3}{n + 3} = \frac{2n + 9}{n + 3}. \text{ (Contrôle : } u_1 = \frac{11}{4}.)$$

$$4. \text{ d. Somme de } n + 1 \text{ termes consécutifs d'une suite arithmétique : } \sum_{k=0}^n v_k = (n + 1) \frac{v_0 + v_n}{2} = (n + 1) \frac{1 + \frac{n+3}{3}}{2} = \frac{(n + 1)(n + 6)}{6}.$$

Exercice 2

$$1. u_1 = \frac{18 - 4}{4} = \frac{7}{2} ; u_2 = \frac{21 - 4}{9/2} = \frac{34}{9}.$$

2. $1 < 3 < 4$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 < u_n < 4$; alors $u_n + 1 > 0$ et

$$u_{n+1} - 1 = \frac{5(u_n - 1)}{u_n + 1} > 0, \quad u_{n+1} - 4 = \frac{6u_n - 4 - 4u_n - 4}{u_n + 1} = \frac{2(u_n - 4)}{u_n + 1} < 0.$$

Par récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) 1 < u_n < 4$.

$$3. \text{ a. } u_{n+1} - u_n = \frac{6u_n - 4 - u_n^2 - u_n}{u_n + 1} = \frac{-(u_n^2 - 5u_n + 4)}{u_n + 1} = -\frac{(u_n - 1)(u_n - 4)}{u_n + 1}.$$

3. b. $u_n - 1 > 0$, $u_n - 4 < 0$, $u_n + 1 > 0$: $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite est strictement croissante.

4. a. D'après 2 ($u_n \neq 1$) : $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 4}{u_{n+1} - 1} = \frac{2(u_n - 4)}{u_n + 1} \times \frac{u_n + 1}{5(u_n - 1)} = \frac{2}{5}v_n$. (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$, de premier terme $v_0 = \frac{3-4}{3-1} = -\frac{1}{2}$.

4. b. $v_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n$. De $v_n(u_n - 1) = u_n - 4$: $u_n(v_n - 1) = v_n - 4$; or $v_n < 0$, donc $v_n \neq 1$ et

$$u_n = \frac{4 - v_n}{1 - v_n} = \frac{8 + (2/5)^n}{2 + (2/5)^n} = \frac{8 \times 5^n + 2^n}{2 \times 5^n + 2^n}.$$

4. c. Pour $n \geq 2$, la somme comporte $n - 1$ termes, le premier étant $v_2 = -\frac{1}{2} \times \frac{4}{25} = -\frac{2}{25}$:

$$\sum_{k=2}^n v_k = -\frac{2}{25} \times \frac{1 - (2/5)^{n-1}}{1 - 2/5} = -\frac{2}{25} \times \frac{5}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right) = -\frac{2}{15} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right).$$

Exercice 3

$$1. u_1 = \frac{1-4}{1+5} = -\frac{1}{2}; u_2 = \frac{-1/2-4}{-1/2+5} = \frac{-9/2}{9/2} = -1.$$

2. $u_0 = 1 > -2$. Si $u_n > -2$, alors $u_n + 5 > 3 > 0$ et $u_{n+1} + 2 = \frac{u_n - 4 + 2u_n + 10}{u_n + 5} = \frac{3(u_n + 2)}{u_n + 5} > 0$. Par récurrence, $u_n > -2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$3. \text{ a. } u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - 4 - u_n^2 - 5u_n}{u_n + 5} = \frac{-(u_n^2 + 4u_n + 4)}{u_n + 5} = -\frac{(u_n + 2)^2}{u_n + 5}.$$

3. b. $(u_n + 2)^2 > 0$ et $u_n + 5 > 0$: (u_n) est strictement décroissante.

4. a. $v_0 = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = \frac{u_n + 5}{3(u_n + 2)} = \frac{(u_n + 2) + 3}{3(u_n + 2)} = \frac{1}{3} + v_n$. (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.

$$4. \text{ b. } v_n = \frac{1}{3} + \frac{n}{3} = \frac{n+1}{3}, \text{ puis } u_n = \frac{1}{v_n} - 2 = \frac{3}{n+1} - 2 = \frac{1-2n}{n+1}. \text{ (Contrôle : } u_2 = -1.)$$

$$4. \text{ c. Pour } n \geq 3, \text{ il y a } n - 2 \text{ termes, de } v_3 = \frac{4}{3} \text{ à } v_n = \frac{n+1}{3} : \sum_{k=3}^n v_k = (n-2) \frac{\frac{4}{3} + \frac{n+1}{3}}{2} = \frac{(n-2)(n+5)}{6}.$$

Exercice 4

1. $u_0 = -1 < 0$. Si $u_n < 0$, alors $4 - 3u_n > 4 > 0$ (u_{n+1} est défini) et $u_{n+1} = \frac{u_n}{4 - 3u_n} < 0$. Par récurrence, ($\forall n \in \mathbb{N}$) $u_n < 0$.

2. $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - 4u_n + 3u_n^2}{4 - 3u_n} = \frac{3u_n(u_n - 1)}{4 - 3u_n}$. Or $u_n < 0$, $u_n - 1 < 0$ et $4 - 3u_n > 0$: $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite (u_n) est strictement croissante.

3. a. $u_n - 1 < 0$, donc v_n est défini. $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n - 4 + 3u_n}{4 - 3u_n} = \frac{4(u_n - 1)}{4 - 3u_n}$, d'où

$$v_{n+1} = \frac{u_n}{4 - 3u_n} \times \frac{4 - 3u_n}{4(u_n - 1)} = \frac{1}{4}v_n.$$

(v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$.

3. b. $v_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{2 \times 4^n}$. De $v_n(u_n - 1) = u_n$: $u_n(v_n - 1) = v_n$, et $v_n \neq 1$, donc $u_n = \frac{v_n}{v_n - 1} = \frac{1}{1 - 2 \times 4^n}$. (Contrôle : $u_0 = -1$, $u_1 = -\frac{1}{7}$.)

$$3. \text{ c. } S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - (1/4)^{n+1}}{1 - 1/4} = \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right).$$

Exercice 5

1. $u_n = u_0 + nr = 7 - 3n$: $u_{10} = -23$ et $u_{15} = -38$. Puis $7 - 3n = -98 \iff 3n = 105 \iff n = 35$.
2. $u_{14} = u_2 + 12r$, donc $12r = 6$ et $r = \frac{1}{2}$; $u_0 = u_2 - 2r = 3$.
3. $u_0 = u_{30} - 30r = 52 - 45 = 7$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 + \frac{3}{2}n$. Enfin $\sum_{k=0}^{30} u_k = 31 \times \frac{7+52}{2} = \frac{1829}{2}$.

Exercice 6

1. $v_n = 81 \left(\frac{1}{3}\right)^n$: $v_4 = 1$ et $v_6 = \frac{1}{9}$.
2. $v_7 = v_4 q^3$, donc $q^3 = \frac{2/3}{18} = \frac{1}{27}$ et $q = \frac{1}{3}$ (unique racine cubique réelle). Puis $v_0 = \frac{v_4}{q^4} = 18 \times 81 = 1458$.
3. $v_3 = v_0 q^3 = 8v_0$, donc $v_0 = -\frac{1}{128}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\frac{2^n}{128} = -2^{n-7}$.

Exercice 7

Le réel b est non nul (sinon $abc = 0$), donc a, b, c sont non nuls et, en notant q la raison, $a = \frac{b}{q}$ et $c = bq$. Alors $abc = b^3 = 216$, d'où $b = 6$. Puis

$$\frac{6}{q} + 6 + 6q = 19 \iff 6q^2 - 13q + 6 = 0 \iff q \in \left\{ \frac{3}{2}; \frac{2}{3} \right\}$$

(on a multiplié par $q \neq 0$; discriminant $169 - 144 = 25$). Pour $q = \frac{3}{2}$: $(a; b; c) = (4; 6; 9)$; pour $q = \frac{2}{3}$: $(a; b; c) = (9; 6; 4)$. Réciproquement, ces deux triplets conviennent.

Exercice 8

$a + c = 2b$, donc $3b = 24$ et $b = 8$; puis $a = 8 - r$, $c = 8 + r$. La seconde condition s'écrit $(8 - r) - 16 + 3(8 + r) = 28 \iff 16 + 2r = 28 \iff r = 6$. Ainsi $a = 2$, $b = 8$, $c = 14$ et $r = 6$ (vérification : $2 - 16 + 42 = 28$).

Exercice 9

1. $u_p = u_4 + (p - 4)r = 5 - 3(p - 4)$. Donc $u_p = -40 \iff 3(p - 4) = 45 \iff p = 19$.
2. La somme comporte $19 - 4 + 1 = 16$ termes : $\sum_{k=4}^{19} u_k = 16 \times \frac{5 + (-40)}{2} = -280$.

Exercice 10

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 2^n$ et $u_3 = 8u_0 = 5$, donc $u_0 = \frac{5}{8}$ et $u_n = 5 \times 2^{n-3}$. Ainsi $u_p = 160 \iff 2^{p-3} = 32 = 2^5 \iff p = 8$. Pour $n \geq 3$, la somme comporte $n - 2$ termes :

$$\sum_{k=3}^n u_k = 5 \times \frac{1 - 2^{n-2}}{1 - 2} = 5(2^{n-2} - 1).$$

Exercice 11

On a $-2S_n = \sum_{k=0}^n (-2)^{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} (-2)^j$. Par différence, tous les termes d'indice 1 à n se compensent :

$$S_n - (-2)S_n = (-2)^0 - (-2)^{n+1}, \quad \text{soit} \quad 3S_n = 1 - (-2)^{n+1},$$

d'où $S_n = \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12

1. Les termes forment une suite arithmétique de premier terme 11 et de raison 7 ; $704 = 11 + 7k \iff k = 99$: il y a 100 termes. $S_1 = 100 \times \frac{11 + 704}{2} = 35\,750$.

2. Suite arithmétique de premier terme $\frac{1}{4}$ et de raison $\frac{3}{4}$; $\frac{31}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}k \iff k = 10$: 11 termes. $S_2 = 11 \times \frac{\frac{1}{4} + \frac{31}{4}}{2} = 11 \times 4 = 44$.

Exercice 13

1. $u_0 = 0 \in [0; 1]$. Si $0 \leq u_n \leq 1$, alors $u_n + 4 > 0$, $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4} \geq 0$ et $u_{n+1} - 1 = \frac{2(u_n - 1)}{u_n + 4} \leq 0$. Par récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 \leq u_n \leq 1$.

2. $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2 - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4} = \frac{-(u_n^2 + u_n - 2)}{u_n + 4} = \frac{(1 - u_n)(u_n + 2)}{u_n + 4} \geq 0$: (u_n) est croissante.

3. a. $u_{n+1} + 2 = \frac{5(u_n + 2)}{u_n + 4}$, donc $v_{n+1} = \frac{2(u_n - 1)}{u_n + 4} \times \frac{u_n + 4}{5(u_n + 2)} = \frac{2}{5}v_n$: raison $\frac{2}{5}$, premier terme $v_0 = -\frac{1}{2}$.

3. b. $v_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n$. De $v_n(u_n + 2) = u_n - 1$: $u_n = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n}$ ($v_n \neq 1$), soit $u_n = \frac{2 \times 5^n - 2 \times 2^n}{2 \times 5^n + 2^n}$.

4. $1 - u_n = \frac{-3v_n}{1 - v_n} = \frac{\frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n}$. Pour $n = 5$: $1 - u_5 = \frac{3 \times 2^5}{2 \times 5^5 + 2^5} = \frac{96}{6282} > \frac{1}{100}$; pour $n = 6$: $1 - u_6 = \frac{3 \times 2^6}{2 \times 5^6 + 2^6} = \frac{192}{31314} < \frac{1}{100}$. La suite (u_n) étant croissante, pour tout $n \geq 6$, $u_n \geq u_6 > 0,99$. On peut donc prendre $N = 5$ (et $N = 5$ est le plus petit entier convenable, puisque $u_5 < 0,99$).

Exercice 14

1. $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}}$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1; \dots; n\}$: $n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$, et la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $\frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$. En sommant les n inégalités :

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

D'une part $\frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} < \frac{n}{\sqrt{n^2}} = 1$. D'autre part $\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ et $\frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2} \iff 2n \geq n+1 \iff n \geq 1$.

Ainsi $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \frac{\sqrt{2}}{2} \leq u_n < 1$.

Exercice 15

1. Notons r la raison. $u_{n-p} = u_0 + (n-p)r$ et $u_{n+p} = u_0 + (n+p)r$, donc $u_{n-p} + u_{n+p} = 2u_0 + 2nr = 2u_n$. (Pour $p = 1$, on retrouve la propriété caractéristique.)

2. Notons $q > 0$ la raison ($q = \frac{v_1}{v_0} > 0$). $v_{n-p}v_{n+p} = v_0q^{n-p} \times v_0q^{n+p} = v_0^2q^{2n} = (v_0q^n)^2 = v_n^2$.

Exercice 16

1. $P_3 = 5$, $P_4 = 12$, $P_5 = 29$, $P_6 = 70$, $P_7 = 169$, $P_8 = 408$, $P_9 = 985$, $P_{10} = 2 \times 985 + 408 = 2378$.

2. $x^2 - 2x - 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 2 \iff x \in \{1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}$. Seule $1 + \sqrt{2}$ est positive : $\omega = 1 + \sqrt{2}$.

3. ω est solution, donc $\omega^2 = 2\omega + 1$; en divisant par $\omega \neq 0$: $\omega = 2 + \frac{1}{\omega}$, d'où $\frac{1}{\omega} = \omega - 2 = \sqrt{2} - 1$. Enfin $1 + \omega^2 = 2 + 2\omega = 2(1 + \omega)$ et $\frac{\omega}{1 + \omega^2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2(2 + \sqrt{2})} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

4. a. On pose $\omega' = -\frac{1}{\omega} = 1 - \sqrt{2}$: c'est l'autre solution de $x^2 = 2x + 1$. Donc $\omega^{n+2} = 2\omega^{n+1} + \omega^n$ et $\omega'^{n+2} = 2\omega'^{n+1} + \omega'^n$; en multipliant par α et β puis en additionnant : $V_{n+2} = 2V_{n+1} + V_n$.

4. b. Avec $\omega^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ et $\omega'^2 = 3 - 2\sqrt{2}$, les conditions $V_1 = 1$ et $V_2 = 2$ s'écrivent

$$\begin{cases} \alpha(1 + \sqrt{2}) + \beta(1 - \sqrt{2}) = 1 \\ \alpha(3 + 2\sqrt{2}) + \beta(3 - 2\sqrt{2}) = 2 \end{cases}$$

Comme $\omega^2 = 2\omega + 1$ et $\omega'^2 = 2\omega' + 1$, la seconde ligne moins deux fois la première donne $\alpha + \beta = 0$. Puis $\alpha((1 + \sqrt{2}) - (1 - \sqrt{2})) = 1 : \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\beta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (on vérifie que ce couple convient). Les suites (V_n) et (P_n) ont les deux mêmes premiers termes et la même relation de récurrence : une récurrence (à deux termes) donne $V_n = P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. c. $-\frac{1}{\omega} = -(\sqrt{2} - 1) = 1 - \sqrt{2}$. Donc $P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\omega^n - \omega'^n) = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$.

4. d. $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ et $(1 + \sqrt{2})^3 = (3 + 2\sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 7 + 5\sqrt{2}$, puis $(1 + \sqrt{2})^6 = (7 + 5\sqrt{2})^2 = 99 + 70\sqrt{2}$.
De même $(1 - \sqrt{2})^6 = 99 - 70\sqrt{2}$. Donc $P_6 = \frac{140\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 70$.

5. a. $W_n = \frac{\omega^{n+1} - \omega'^{n+1}}{\omega^n - \omega'^n}$ avec $\omega' = -\omega^{-1}$. En divisant numérateur et dénominateur par $\omega^n \neq 0 : \omega'^{n+1}/\omega^n = (-1)^{n+1}\omega^{-(2n+1)}$ et $\omega'^n/\omega^n = (-1)^n\omega^{-2n}$, d'où la formule.

5. b. On note $D = 1 - (-1)^n\omega^{-2n}$ ($D > 0$ car $\omega^{-2n} < 1$). Alors

$$W_n - \omega = \frac{\omega - (-1)^{n+1}\omega^{-2n-1} - \omega + (-1)^n\omega^{1-2n}}{D} = \frac{(-1)^n\omega^{-2n}\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)}{D} = \frac{(-1)^n\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)}{\omega^{2n} - (-1)^n},$$

et $\omega + \frac{1}{\omega} = (1 + \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2}$. Comme $\omega^{2n} - (-1)^n > 0$: si n est pair, $W_n > \omega$; si n est impair, $W_n < \omega$.
(Exemples : $W_1 = 2 < \omega \approx 2,414 < W_2 = \frac{5}{2}$.)