

Corrigé détaillé de la série — Chapitre 06

Analytique du produit scalaire dans le plan

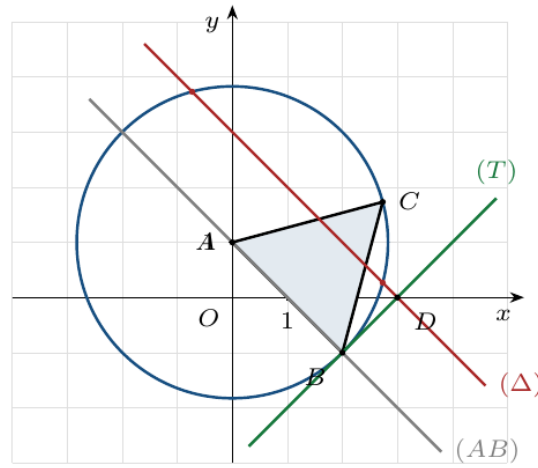
1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — méthodes utilisées

- **Repère orthonormé** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$, $\cos = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$, $\sin = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$, aire = $\frac{1}{2} |\det(\vec{AB}; \vec{AC})|$.
- **Droites** : $\vec{n}(a; b)$ normal à $ax + by + c = 0$; droite passant par A de vecteur normal $\vec{n}$: $\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$; $d(A; (D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
- **Cercles** : forme canonique; tangente en A : $\vec{AO} \cdot \vec{AM} = 0$; une droite est tangente $\iff d(O; (D)) = R$.
- **Régionnement** : intérieur d'un cercle $\iff x^2 + y^2 + ax + by + c < 0$; demi-plan : test d'un point.
- Tous les calculs ont été contrôlés avec Python/sympy (`build/verif_lot3.py`).

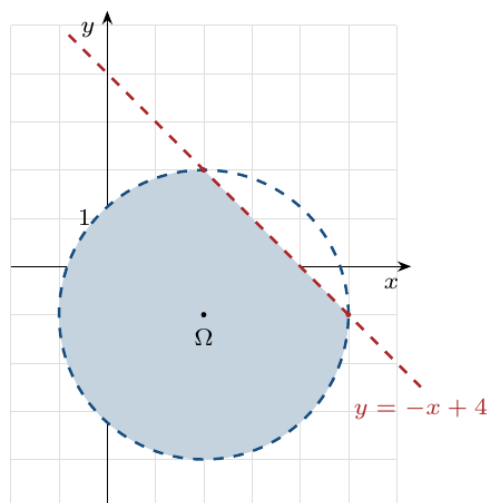
Exercice 1

- $\vec{AB}(2; -2)$, $\vec{AC}(1 + \sqrt{3}; \sqrt{3} - 1)$. $AB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; $AC^2 = (4 + 2\sqrt{3}) + (4 - 2\sqrt{3}) = 8$, donc $AC = 2\sqrt{2}$.
 $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 2(1 + \sqrt{3}) - 2(\sqrt{3} - 1) = 4$.
- $\cos(\widehat{\vec{AC}; \vec{AB}}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. $\det(\vec{AC}; \vec{AB}) = (1 + \sqrt{3})(-2) - 2(\sqrt{3} - 1) = -4\sqrt{3}$, donc $\sin(\widehat{\vec{AC}; \vec{AB}}) = \frac{-4\sqrt{3}}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Une mesure de $(\widehat{\vec{AC}; \vec{AB}})$ est $-\frac{\pi}{3}$; le triangle est isocèle en A ($AB = AC$) avec un angle au sommet de $\frac{\pi}{3}$: il est **équilatéral**.
- $0 + 1 - 1 = 0$ et $2 - 1 - 1 = 0$: A et B vérifient l'équation, qui est bien celle d'une droite; c'est donc une équation de (AB) .
- $d(C; (AB)) = \frac{|1 + \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$.
- Méthode 1* : $S = \frac{1}{2} AB \times d(C; (AB)) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{3}$. *Méthode 2* : $S = \frac{1}{2} |\det(\vec{AC}; \vec{AB})| = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.
- a.** Rayon $AC = 2\sqrt{2}$: $x^2 + (y - 1)^2 = 8 \iff x^2 + y^2 - 2y - 7 = 0$.
- b.** $4 + 1 + 2 - 7 = 0$: $B \in (C)$. $\vec{BA}(-2; 2)$ est normal à la tangente (T) en B : $-2(x - 2) + 2(y + 1) = 0 \iff x - y - 3 = 0$.
- c.** $(\Delta) \parallel (AB)$: $(\Delta) : x + y + c = 0$; $D \in (\Delta)$ donne $3 + c = 0$. D'où $x + y - 3 = 0$.
- d.** $d(A; (\Delta)) = \frac{|0 + 1 - 3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < 2\sqrt{2}$: (Δ) coupe (C) en deux points. Avec $y = 3 - x$: $x^2 + (3 - x)^2 - 2(3 - x) - 7 = 0 \iff 2x^2 - 4x - 4 = 0 \iff x^2 - 2x - 2 = 0$, d'où $x = 1 \pm \sqrt{3}$. Points d'intersection : $(1 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3})$ et $(1 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$.



Exercice 2

- $\overrightarrow{AB}(3; -1)$, $\overrightarrow{AC}(2; 1)$: $AB = \sqrt{10}$, $AC = \sqrt{5}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 6 - 1 = 5$.
- $\cos = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\det(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) = 2 \times (-1) - 1 \times 3 = -5$, $\sin = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Mesure principale : $-\frac{\pi}{4}$.
- $\overrightarrow{AD}(1; -2)$ est normal à (D) : $(x - 4) - 2(y - 1) = 0 \iff x - 2y - 2 = 0$.
- $d(A; (D)) = \frac{|1 - 4 - 2|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.
- (C) est tangent à $(D) \iff$ son rayon vaut $d(A; (D)) = \sqrt{5}$. Équation : $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5 \iff x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$.
- $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{5} \cos \theta \\ y = 2 + \sqrt{5} \sin \theta \end{cases}$, $\theta \in \mathbb{R}$.
- $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4 + 1 + 4 = 9$: (Γ) est le cercle de centre $\Omega(2; -1)$ et de rayon 3.
- $d(\Omega; (\Delta)) = \frac{|2 - 1 - 4|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} < 3$: sécante. Avec $y = 4 - x$: $x^2 + (4 - x)^2 - 4x + 2(4 - x) - 4 = 0 \iff 2x^2 - 14x + 20 = 0 \iff (x - 2)(x - 5) = 0$. Points : $(2; 2)$ et $(5; -1)$.
- $y < -x + 4$: demi-plan ouvert contenant O ; la seconde inéquation : intérieur de (Γ) . Solution : la partie colorée, frontières exclues.



Exercice 3

- $I(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2})$, $J(3; 7)$, $K(\frac{3}{2}; \frac{5}{2})$.
- $\overrightarrow{AB}(3; 9)$, $\overrightarrow{BC}(4; -2)$, $\overrightarrow{CA}(-7; -7)$.

3. a. (D_1) passe par I et admet $\overrightarrow{AB}(3;9)$, ou $\vec{n}_1(1;3)$, pour vecteur normal.

3. b. $(D_1) : (x + \frac{1}{2}) + 3(y - \frac{7}{2}) = 0 \iff x + 3y - 10 = 0$. De même, (D_2) passe par J , de vecteur normal $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = (2; -1) : 2(x - 3) - (y - 7) = 0 \iff 2x - y + 1 = 0$. (D_3) passe par K , de vecteur normal $-\frac{1}{7}\overrightarrow{CA} = (1; 1) : x + y - 4 = 0$.

3. c. $(D_1) \cap (D_2) : y = 2x + 1$ donne $x + 6x + 3 - 10 = 0$, $x = 1$, $y = 3$. Et $1 + 3 - 4 = 0 : (1; 3) \in (D_3)$. Les trois médiatrices sont concourantes en $\Omega(1; 3)$.

3. d. $\Omega A^2 = 9 + 16 = 25$, $\Omega B^2 = 0 + 25 = 25$, $\Omega C^2 = 16 + 9 = 25 : \Omega A = \Omega B = \Omega C = 5$. Ω est le **centre du cercle circonscrit** au triangle ABC (rayon 5).

Exercice 4

1. $\overrightarrow{AB}(3;9)$, $\overrightarrow{BC}(4;-2)$, $\overrightarrow{CA}(-7;-7)$.

2. a. (D_A) passe par A et admet $\overrightarrow{BC}(4;-2)$ (ou $(2;-1)$) comme vecteur normal.

2. b. $(D_A) : 2(x + 2) - (y + 1) = 0 \iff 2x - y + 3 = 0$. (D_B) : par B , normal $(1; 1) : (x - 1) + (y - 8) = 0 \iff x + y - 9 = 0$. (D_C) : par C , normal $(1; 3) : (x - 5) + 3(y - 6) = 0 \iff x + 3y - 23 = 0$.

2. c. $(D_A) \cap (D_B)$: par addition, $3x - 6 = 0$, $x = 2$, $y = 7$; et $2 + 21 - 23 = 0 : (2; 7) \in (D_C)$. Les hauteurs sont concourantes en $H(2; 7)$.

2. d. H est l'**orthocentre** du triangle ABC .

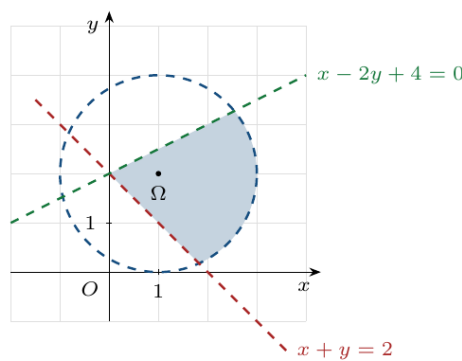
3. a. $-6 + 1 + 5 = 0$ et $3 - 8 + 5 = 0 : A$ et B vérifient cette équation de droite.

3. b. $y = 3x + 5$ dans $x + 3y - 23 = 0 : 10x - 8 = 0$, $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{37}{5} : E(\frac{4}{5}; \frac{37}{5})$.

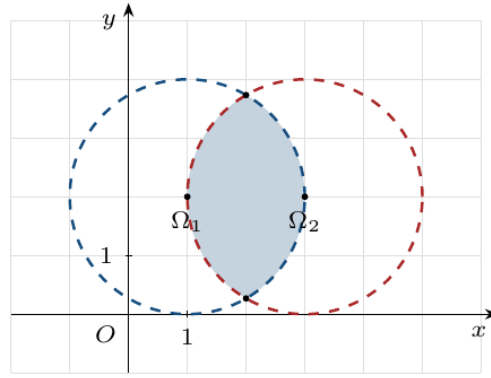
3. c. *Méthode 1* : E est le pied de la hauteur issue de C . $AB = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$; $\overrightarrow{EC}(\frac{21}{5}; -\frac{7}{5})$, $CE = \frac{7}{5}\sqrt{10}$. $S = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{10} \times \frac{7}{5}\sqrt{10} = 21$. *Méthode 2* : $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 3 \times 7 - 9 \times 7 = -42$, $S = \frac{1}{2} \times 42 = 21$.

Exercice 5

1. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 < 0 \iff (x - 1)^2 + (y - 2)^2 < 4$: intérieur du cercle de centre $\Omega(1; 2)$ et de rayon 2. Le centre vérifie $1 + 2 - 2 > 0$ et $1 - 4 + 4 > 0$: on garde, pour chaque droite, le demi-plan ouvert contenant Ω . Les deux droites se coupent en $(0; 2)$, intérieur au disque. Solution : la partie colorée, frontières exclues.



2. La seconde inéquation s'écrit $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 < 4$: intérieur du cercle de centre $\Omega_2(3; 2)$, de rayon 2. Les deux cercles se coupent en $(2; 2 - \sqrt{3})$ et $(2; 2 + \sqrt{3})$ (on retranche les équations : $4x - 8 = 0$). Solution : la lentille commune aux deux disques ouverts.

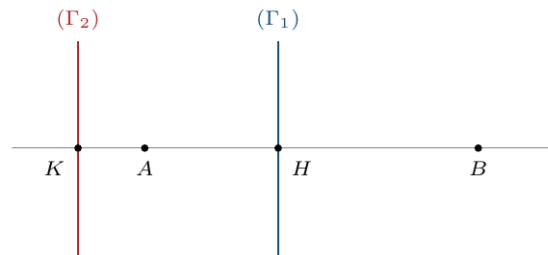


Exercice 6

1. $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1 + 9 + 15 = 25 : \Omega(1; 3), R = 5$.
2. $y = 0 : x^2 - 2x - 15 = 0 \iff (x+3)(x-5) = 0 : A(-3; 0), B(5; 0)$.
3. En A : $\overrightarrow{A\Omega}(4; 3) : 4(x+3) + 3y = 0 \iff 4x + 3y + 12 = 0$. En B : $\overrightarrow{B\Omega}(-4; 3) : -4(x-5) + 3y = 0 \iff 4x - 3y - 20 = 0$.
4. Une droite de vecteur directeur $\vec{u}(4; 3)$ a un vecteur normal $(3; -4) : 3x - 4y + c = 0$. Elle est tangente $\iff \frac{|3-12+c|}{5} = 5 \iff |c-9| = 25 \iff c = 34$ ou $c = -16$. Tangentes : $(T_1) : 3x - 4y + 34 = 0$ et $(T_2) : 3x - 4y - 16 = 0$. Le point de contact est le projeté orthogonal de $\Omega : \Omega + \lambda(3; -4)$ avec $3(1+3\lambda) - 4(3-4\lambda) + c = 0$. Pour $c = 34 : \lambda = -1$, contact $(-2; 7)$; pour $c = -16 : \lambda = 1$, contact $(4; -1)$.

Exercice 7

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 10$ avec $H \in [AB] : AB \times AH = 10$, donc $AH = 2$. Alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 10 \iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} \iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HM} = 0 : (\Gamma_1)$ est la **droite perpendiculaire à (AB) en H** .
2. Soit K le point de (AB) tel que $\overrightarrow{AK} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ ($AK = 1$, K hors de $[AB]$, du côté de A) : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AK} = -\frac{1}{5} \times 25 = -5$. Comme en 1, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -5 \iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KM} = 0 : (\Gamma_2)$ est la droite perpendiculaire à (AB) en K .



Exercice 8

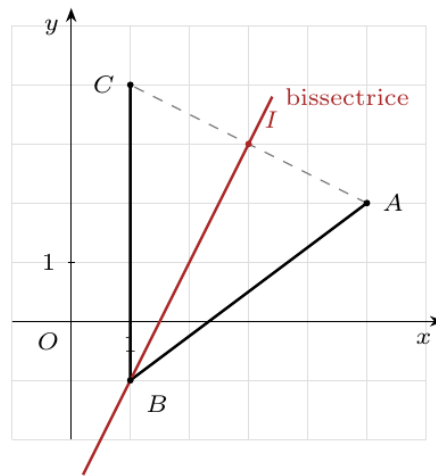
$\Omega(-2; 1), R = 3$. Une parallèle à (D) s'écrit $4x - 3y + c = 0$; elle est tangente $\iff \frac{|-8-3+c|}{5} = 3 \iff |c-11| = 15 \iff c = 26$ ou $c = -4$. Tangentes : $4x - 3y + 26 = 0$ et $4x - 3y - 4 = 0$.

Exercice 9

$\Omega(-1; 2), R = \sqrt{10}$; $\Omega A^2 = 16 + 4 = 20 > 10 : A$ est extérieur. La droite $x = 3$ est à distance $4 \neq \sqrt{10}$ de Ω : pas tangente. Les autres droites passant par A s'écrivent $mx - y - 3m = 0$. Tangente $\iff \frac{|-m-2-3m|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{10} \iff (4m+2)^2 = 10(m^2+1) \iff 3m^2 + 8m - 3 = 0 \iff m = \frac{1}{3}$ ou $m = -3$. Tangentes : $x - 3y - 3 = 0$ et $3x + y - 9 = 0$.

Exercice 10

1. $BA = \sqrt{16+9} = 5$ et $BC = 5$: le triangle ABC est isocèle en B , donc la bissectrice de $\widehat{ABC}$ est la médiane issue de B : on construit le milieu $I(3;3)$ de $[AC]$ et on trace (BI) . (Autre construction : on complète le losange $BAPC$, la bissectrice est (BP) .)
2. $\vec{BI}(2;4)$ dirige la bissectrice, d'où le vecteur normal $(2;-1)$: $2(x-1) - (y+1) = 0 \iff 2x - y - 3 = 0$.



Exercice 11

1. Soit $\Omega(a;b)$ le centre. Tangence à (Ox) : $R = |b|$ (et $b \neq 0$). Passage par A et B : $(a+1)^2 + (b-2)^2 = b^2$ et $(a-6)^2 + (b-9)^2 = b^2$, soit $4b = a^2 + 2a + 5$ et $18b = a^2 - 12a + 117$. En éliminant b : $9(a^2 + 2a + 5) = 2(a^2 - 12a + 117) \iff 7a^2 + 42a - 189 = 0 \iff a^2 + 6a - 27 = 0 \iff a = 3$ ou $a = -9$.

— $a = 3$: $b = 5$, $R = 5$: $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$, soit $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$.

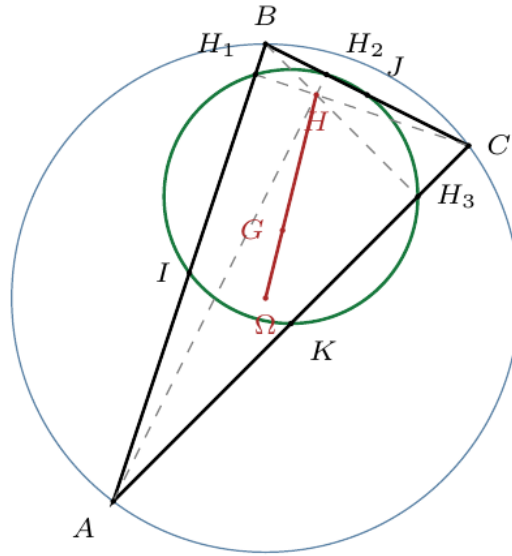
— $a = -9$: $b = 17$, $R = 17$: $(x+9)^2 + (y-17)^2 = 289$, soit $x^2 + y^2 + 18x - 34y + 81 = 0$.

2. Le centre est sur la médiatrice de $[AB]$: milieu $(-1;2)$, vecteur normal $(1;1)$: $x + y - 1 = 0$, d'où $\Omega(a;1-a)$. Alors $d(\Omega; (D)) = \frac{|a+1-a-11|}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$, donc $R^2 = 50$. Condition $\Omega A^2 = 50$: $(a-2)^2 + (a+4)^2 = 50 \iff a^2 + 2a - 15 = 0 \iff a = 3$ ou $a = -5$. Cercles : $\Omega(3;-2)$: $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 37 = 0$; $\Omega(-5;6)$: $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 11 = 0$.

Exercice 12

1. $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$, $J(3;7)$, $K\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.
2. (Voir l'exercice 3.) $x + 3y - 10 = 0$; $2x - y + 1 = 0$; $x + y - 4 = 0$.
3. Leur point commun est $\Omega(1;3)$ (exercice 3), unique car (D_1) et (D_2) ne sont pas parallèles ($1 \times (-1) - 3 \times 2 \neq 0$).
4. (Voir l'exercice 4.) $2x - y + 3 = 0$; $x + y - 9 = 0$; $x + 3y - 23 = 0$.
5. Point commun $H(2;7)$, unique car $\det((2;-1); (1;1)) = 3 \neq 0$.
6. $G\left(\frac{-2+1+5}{3}; \frac{-1+8+6}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}; \frac{13}{3}\right)$.
7. $\vec{\Omega H}(1;4)$ et $\vec{\Omega G}\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$: $\vec{\Omega H} = 3\vec{\Omega G}$ (Ω, G, H sont alignés : droite d'Euler).
8. H_1 : $H \in (D_C)$, perpendiculaire à (AB) passant par C ; donc $H_1 = (D_C) \cap (AB) = E\left(\frac{4}{5}; \frac{37}{5}\right)$. $H_2 = (D_A) \cap (BC)$ avec (BC) : $x+2y-17=0$: $y = 2x+3$ donne $5x-11=0$, $H_2\left(\frac{11}{5}; \frac{37}{5}\right)$. $H_3 = (D_B) \cap (CA)$ avec (CA) : $x-y+1=0$: $H_3(4;5)$.
9. Équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$: I : $-\frac{1}{2}a + \frac{7}{2}b + c = -\frac{25}{2}$; J : $3a + 7b + c = -58$; K : $\frac{3}{2}a + \frac{5}{2}b + c = -\frac{17}{2}$. On obtient $a = -3$, $b = -10$, $c = 21$: $(\mathcal{E})$: $x^2 + y^2 - 3x - 10y + 21 = 0$, de centre $\omega\left(\frac{3}{2}; 5\right)$ et de rayon $\frac{5}{2}$.
10. H_1 : $\frac{16}{25} + \frac{1369}{25} - \frac{12}{5} - 74 + 21 = \frac{1385-60-1325}{25} = 0$. H_2 : $\frac{121}{25} + \frac{1369}{25} - \frac{33}{5} - 74 + 21 = \frac{1490-165-1325}{25} = 0$. H_3 : $16 + 25 - 12 - 50 + 21 = 0$. Et le milieu de $[\Omega H]$ est $\left(\frac{1+2}{2}; \frac{3+7}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}; 5\right) = \omega$. (($\mathcal{E}$) est le **cercle d'Euler**, de

rayon moitié de celui du cercle circonscrit.)



Exercice 13

Centre $\Omega(3; -1)$ ($9 + 1 + 6 = 16 > 0$: c'est bien un cercle). La droite cherchée passe par Ω et a pour vecteur normal un vecteur directeur de $3x - 4y + 1 = 0$, soit $(4; 3)$: $4(x - 3) + 3(y + 1) = 0 \iff 4x + 3y - 9 = 0$.

Exercice 14

Soit $M_0(a; b)$. On a $(1 - m^2)^2 + 4m^2 = (1 + m^2)^2$, donc $d(M_0; (D_m)) = \frac{|(5 - a)m^2 + (2b + 2)m + (a + 1)|}{1 + m^2}$.
Cherchons a, b tels que le numérateur soit proportionnel à $1 + m^2$: il suffit que $5 - a = a + 1$ et $2b + 2 = 0$, soit $a = 2, b = -1$. Alors, pour tout $m \in \mathbb{R}$, $d(M_0; (D_m)) = \frac{3m^2 + 3}{1 + m^2} = 3$: le point $M_0(2; -1)$ est à la distance 3 de toutes les droites (D_m) .

Exercice 15

Dans les deux cas, les deux droites données sont perpendiculaires ($1 \times 2 + 2 \times (-1) = 0$; $4 \times 3 + 3 \times (-4) = 0$), et le centre $\Omega(a; b)$, équidistant des deux droites, est sur l'une des deux bissectrices : $|e_1| = |e_2| \iff e_1 = e_2$ ou $e_1 = -e_2$ (même dénominateur $\sqrt{5}$, resp. 5).

1. $e_1 = a + 2b - 10, e_2 = 2a - b - 5, R^2 = a^2 + b^2$ (passage par O) et $R^2 = \frac{e_1^2}{5}$.

- $e_1 = e_2 \iff a = 3b - 5$: $e_1 = 5b - 15$, et $5(b - 3)^2 = (3b - 5)^2 + b^2 \iff 5b^2 = 20 \iff b = \pm 2$: $\Omega(1; 2), R^2 = 5$, ou $\Omega(-11; -2), R^2 = 125$.
- $e_1 = -e_2 \iff b = 15 - 3a$: $e_1 = 20 - 5a$ et $5(4 - a)^2 = a^2 + (15 - 3a)^2 \iff a^2 - 10a + 29 = 0$: discriminant $-16 < 0$, pas de solution.

Cercles : $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ et $x^2 + y^2 + 22x + 4y = 0$.

2. $e_1 = 4a + 3b - 15, e_2 = 3a - 4b + 20, R = \frac{|e_1|}{5}$ et $R^2 = (a - 3)^2 + (b - 1)^2$.

- $e_1 = e_2 \iff a = 35 - 7b$: $R = 5|5 - b|$, et $25(5 - b)^2 = (32 - 7b)^2 + (b - 1)^2 \iff 25(b - 4)^2 = 0$: $\Omega(7; 4), R = 5$.
- $e_1 = -e_2 \iff b = 7a + 5$: $R = 5|a|$, et $25a^2 = (a - 3)^2 + (7a + 4)^2 \iff 25(a + 1)^2 = 0$: $\Omega(-1; -2), R = 5$.

Cercles : $x^2 + y^2 - 14x - 8y + 40 = 0$ et $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$.