

Corrigé détaillé de la série — Chapitre 04

Fonctions numériques

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — méthodes utilisées

- **Variations** : on calcule le taux de variation $T(x; y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ pour $x \neq y$ dans l'intervalle et on étudie son signe ; ou bien on écrit f comme composée de fonctions de référence.
- **Extremum** : M est le maximum de f sur I si $f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$ et M est atteint ; un majorant non atteint n'est pas un maximum.
- **Image d'un intervalle** : lecture du tableau de variations (propriété admise du cours), confirmée si besoin par la résolution de $f(x) = y$.
- Tous les calculs ont été contrôlés avec sympy (développements, factorisations, solutions d'équations, signes).

Exercice 1

- a. $f(x)$ existe $\iff 3 - x \geq 0 \iff x \leq 3 : D_f =]-\infty; 3]$.
- b. $f(x)$ existe $\iff |x^2 - 2| \neq 7$. Or $|x^2 - 2| = 7 \iff x^2 - 2 = 7$ ou $x^2 - 2 = -7 \iff x^2 = 9$ ou $x^2 = -5$; la seconde est impossible. Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$.
- c. $f(x)$ existe $\iff 2 - |x + 1| > 0 \iff |x + 1| < 2 \iff -2 < x + 1 < 2 \iff -3 < x < 1 : D_f =]-3; 1[$.
- d. $f(x)$ existe $\iff x^2 - 4 \geq 0$ et $9 - x^2 > 0 \iff |x| \geq 2$ et $|x| < 3 : D_f =]-3; -2] \cup [2; 3[$.

Exercice 2

- 1) La courbe est tracée pour x allant de -2 à $5 : D_f = [-2; 5]$.
- 2) Le point le plus haut est $(1; 4)$ et le plus bas $(3; -2)$: le maximum de f est 4, atteint en 1 ; le minimum est -2 , atteint en 3.
- 3) $f([-2; 1]) = [1; 4]$; $f([-2; 3]) = [-2; 4]$; $f([1; 5]) = [-2; 4]$; $f([3; 5]) = [-2; 2]$.
- 4)

x	-2	1	3	5
$f(x)$		4	-2	2
	1			

Exercice 3

- 1) D'après le tableau, $-1 \leq f(x) \leq 4$ pour tout $x \in [-2; 3]$, avec $f(0) = 4$ et $f(-2) = f(2) = -1$: le maximum est 4 (en 0) et le minimum est -1 (en -2 et en 2).
- 2) 1 et $\frac{3}{2}$ appartiennent à $[0; 2]$, où f est strictement décroissante, et $1 < \frac{3}{2}$: donc $f(1) > f\left(\frac{3}{2}\right)$.
- 3) f est croissante sur $[2; 3] : f([2; 3]) = [f(2); f(3)] = [-1; 2]$. f est décroissante sur $[0; 2] : f([0; 2]) = [-1; 4]$. Enfin $f([-2; 3]) = [-1; 4]$ d'après la question 1.
- 4) Pour $x \in [-3; 0]$, $h(x) = f(-x)$. Une fonction paire a des sens de variation contraires sur deux intervalles symétriques : f est croissante sur $[2; 3]$, donc h est **décroissante** sur $[-3; -2]$; f est décroissante sur $[0; 2]$, donc h est **croissante** sur $[-2; 0]$; enfin $h = f$ sur $[0; 3]$. Avec $h(-3) = f(3) = 2$ et $h(-2) = f(2) = -1$:

x	-3	-2	0	2	3
$h(x)$	2		4		2
		-1		-1	

Exercice 4

1) $1 - \frac{3}{x^2+1} = \frac{x^2+1-3}{x^2+1} = f(x)$ (et $x^2+1 > 0$, donc $D_f = \mathbb{R}$).

2) $\frac{3}{x^2+1} > 0$, donc $f(x) < 1$ pour tout x : f est majorée par 1. L'équation $f(x) = 1$ équivaut à $\frac{3}{x^2+1} = 0$, impossible : 1 n'est pas atteint, ce n'est **pas** le maximum de f .

3) $x^2+1 \geq 1$, donc $0 < \frac{3}{x^2+1} \leq 3$ et $f(x) \geq 1-3 = -2$. De plus $f(0) = -2$: -2 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

4) $f(x) - f(y) = \frac{3}{y^2+1} - \frac{3}{x^2+1} = \frac{3(x^2-y^2)}{(x^2+1)(y^2+1)} = \frac{3(x-y)(x+y)}{(x^2+1)(y^2+1)}$; on divise par $x-y \neq 0$.

5) Si $x, y \in \mathbb{R}_+$ sont distincts, $x+y > 0$ et $T > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Si $x, y \in \mathbb{R}_-$ sont distincts, $x+y < 0$ et $T < 0$: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ (ce qui est cohérent avec la parité de f).

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		-2	

Exercice 5

1) $D_f = [-3; +\infty[$; $D_g = \mathbb{R}$.

2) f est strictement croissante sur $[-3; +\infty[$ (fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$). $g(x) = (x-2)^2 - 4$ est un trinôme avec $a = 1 > 0$: décroissant sur $] -\infty; 2]$, croissant sur $[2; +\infty[$.

x	-3	$+\infty$
$f(x)$	0	

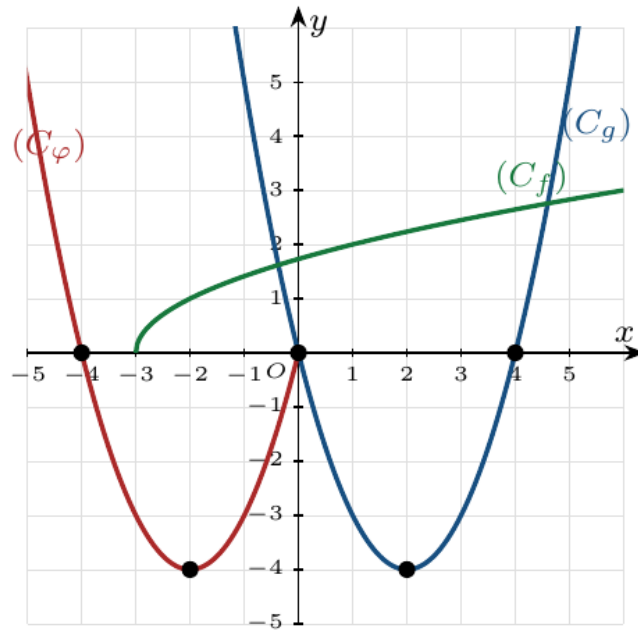
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$		-4	

3) $g(x) = (x-2)^2 - 4 \geq -4$ pour tout réel x , et $g(2) = -4$: -4 est le minimum global de g .

4) $f(x) = 0 \iff x+3=0 \iff x=-3$: (C_f) coupe l'axe des abscisses en $(-3; 0)$. $f(0) = \sqrt{3}$: elle coupe l'axe des ordonnées en $(0; \sqrt{3})$.

5) $g(x) = 0 \iff x(x-4) = 0 \iff x \in \{0; 4\}$: points $(0; 0)$ et $(4; 0)$; $g(0) = 0$: (C_g) coupe l'axe des ordonnées en O .

6) $D_\varphi = \mathbb{R}$ est symétrique et $\varphi(-x) = x^2 - 4|x| = \varphi(x)$: φ est paire. Pour $x \geq 0$, $|x| = x$ donc $\varphi(x) = x^2 - 4x = g(x)$. On trace (C_φ) en gardant (C_g) pour $x \geq 0$ et en la complétant par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.



7) (C_g) est au-dessus de l'axe des abscisses (ou sur cet axe) pour $x \leq 0$ ou $x \geq 4$: $S =]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[$ (en accord avec le signe de $x(x-4)$).

8) Les solutions de $g(x) = m$ sont les abscisses des points communs à (C_g) et à la droite $y = m$:

- si $m < -4$: aucune solution ;
- si $m = -4$: une solution ($x = 2$) ;
- si $m > -4$: deux solutions (symétriques par rapport à 2).

9) $x \in D_h \iff x \in D_f$ et $f(x) \in D_g = \mathbb{R}$: $D_h = [-3; +\infty[$, et $h(x) = (\sqrt{x+3})^2 - 4\sqrt{x+3} = x + 3 - 4\sqrt{x+3}$.
 Sur $[-3; 1]$: f est croissante et $f([-3; 1]) = [0; 2] \subset]-\infty; 2]$, où g est décroissante ; donc h est **décroissante** sur $[-3; 1]$. Sur $[1; +\infty[$: f est croissante et $f([1; +\infty[) = [2; +\infty[$, où g est croissante ; donc h est **croissante** sur $[1; +\infty[$. ($h(-3) = 0$, $h(1) = -4$.)

x	-3	1	$+\infty$
$h(x)$	0	-4	

Exercice 6

Partie A.

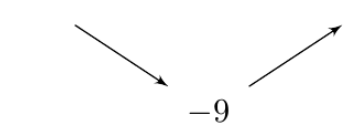
1) $f(x) = (x-1)^2 - 9 = (x-1-3)(x-1+3) = (x+2)(x-4)$; $f(x) = 0 \iff x \in \{-2; 4\}$.

2) Axe des abscisses : $(-2; 0)$ et $(4; 0)$; axe des ordonnées : $f(0) = -8$, point $(0; -8)$.

3) $f(x) - f(y) = (x^2 - y^2) - 2(x - y) = (x - y)(x + y - 2)$, d'où $T = x + y - 2$.

4) Si $x, y \leq 1$ distincts : $x + y < 2$, $T < 0$: f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1]$. Si $x, y \geq 1$ distincts : $x + y > 2$, $T > 0$: f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

5) $f(x) = (x-1)^2 - 9 \geq -9$ et $f(1) = -9$: le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est -9 .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$			

6) (C_f) est une parabole tournée vers le haut, de sommet $\Omega(1; -9)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 1$.

Partie B.

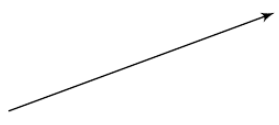
1) $|x| + 2 \geq 2 > 0 : D_g = \mathbb{R}$.

2) $\mathbb{R}$ est symétrique et $g(-x) = \frac{-3x}{|x| + 2} = -g(x) : g$ est impaire.

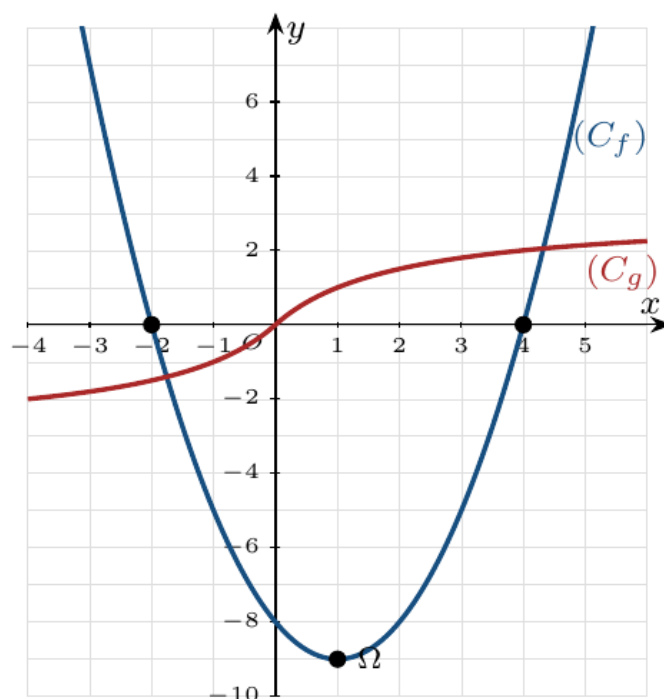
3) Pour $x \geq 0 : g(x) = \frac{3x}{x+2}$, et $3 - \frac{6}{x+2} = \frac{3x+6-6}{x+2} = g(x)$.

4) Pour $x \neq y$ dans $\mathbb{R}_+ : g(x) - g(y) = \frac{6}{y+2} - \frac{6}{x+2} = \frac{6(x-y)}{(x+2)(y+2)}$, donc $T = \frac{6}{(x+2)(y+2)} > 0 : g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

5) g étant impaire, elle a le même sens de variation sur $\mathbb{R}_-$: strictement croissante. Ainsi g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (avec $g(0) = 0$; pour $x < 0$, $g(x) < 0$).

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$			

6) Voir la figure.



7) Les courbes ont exactement **deux** points communs : l'un d'abscisse comprise entre -2 et -1 , l'autre d'abscisse comprise entre 4 et 5 . L'équation $f(x) = g(x)$ admet donc deux solutions (valeurs approchées obtenues par calcul : $x \approx -1,76$ et $x \approx 4,32$).

Exercice 7

$D_f = \mathbb{R}$; pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \pm \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$ et

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(4x + 2\pi - 1) = \sin(4x - 1) = f(x),$$

car $\sin$ est 2π -périodique. Donc f est périodique de période $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 8

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. $\frac{7}{2} + \frac{27}{2(2x-1)} = \frac{7(2x-1) + 27}{2(2x-1)} = \frac{14x+20}{2(2x-1)} = f(x)$. (C_f) est l'hyperbole de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$, associée aux droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{7}{2}$ (Ω est centre de symétrie de (C_f)).

2) $\Delta = ad - bc = 7 \times (-1) - 10 \times 2 = -27 < 0$: f est strictement décroissante sur $] -\infty; \frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$			

3) $g : x \mapsto ax^3$ avec $a = 1 > 0$: g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	↗		

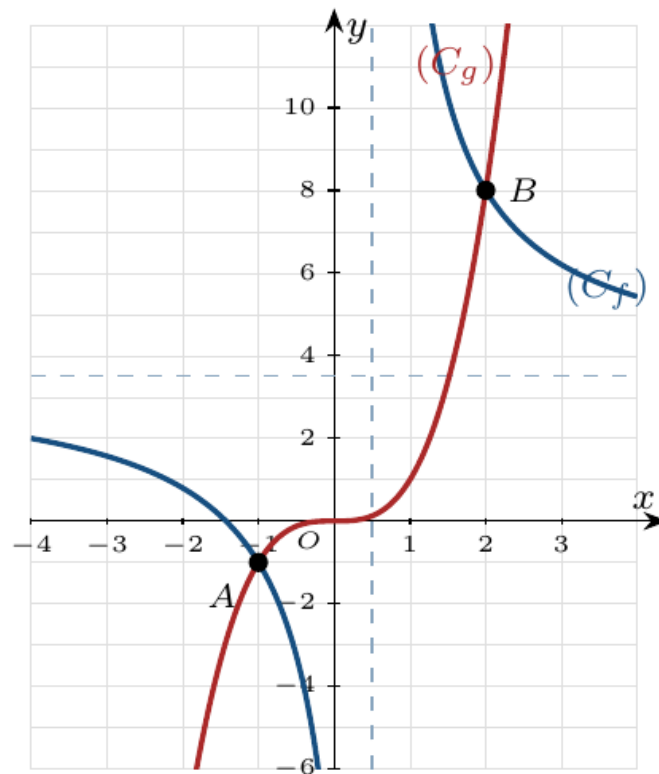
4) $f(-1) = \frac{3}{-3} = -1 = g(-1)$ et $f(2) = \frac{24}{3} = 8 = g(2)$: A et B sont sur les deux courbes.

5) $f(x) - g(x) = \frac{7x+10-x^3(2x-1)}{2x-1} = \frac{-2x^4+x^3+7x+10}{2x-1}$. Or $(x+1)(x-2) = x^2-x-2$ et $(x^2-x-2)(2x^2+x+5) = 2x^4-x^3-7x-10$. D'où l'égalité.

6) Pour $x \neq \frac{1}{2}$: $f(x)+1 = \frac{9x+9}{2x-1} = \frac{9(x+1)}{2x-1}$. Tableau de signes (racines -1 et $\frac{1}{2}$) : $f(x) \leq -1 \iff x \in \left[-1; \frac{1}{2}\right]$.

7) Pour $y \neq \frac{7}{2}$ et $x \neq \frac{1}{2}$: $f(x) = y \iff 7x+10 = y(2x-1) \iff x(2y-7) = y+10 \iff x = \frac{y+10}{2y-7}$, et ce réel est bien différent de $\frac{1}{2}$; la valeur $\frac{7}{2}$ n'est jamais prise (question 1). De plus $\frac{y+10}{2y-7} - \frac{1}{2} = \frac{27}{2(2y-7)}$ est négatif si et seulement si $y < \frac{7}{2}$. Donc $f\left(]-\infty; \frac{1}{2}[\right) =]-\infty; \frac{7}{2}[$ et $f\left(]\frac{1}{2}; +\infty[\right) =]\frac{7}{2}; +\infty[$.

8) Voir la figure.



9) Graphiquement : (C_f) est au-dessus de (C_g) à gauche de A, et entre la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ et B : $S =]-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Algébriquement : $2x^2 + x + 5 > 0$ (discriminant $1 - 40 < 0$), donc $f(x) - g(x)$ a le signe de $\frac{-(x+1)(x-2)}{2x-1}$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$-(x+1)(x-2)$		-	0	+		+	0	-	
$2x-1$		-		-	0	+		+	
$f(x) - g(x)$		+	0	-		+	0	-	

Donc $f(x) \geq g(x) \iff x \in]-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

10) $h(x) = (f(x))^3 = g(f(x)) : h = g \circ f$ et $D_h = \{x \in D_f / f(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

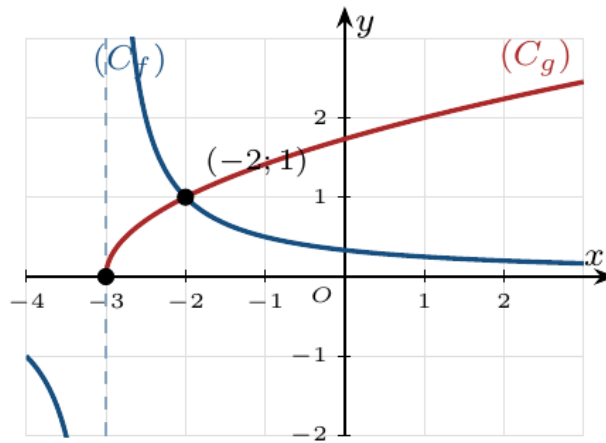
11) Sur $] -\infty; \frac{1}{2}[$: f est décroissante et g est croissante sur $\mathbb{R} \supset f\left(]-\infty; \frac{1}{2}[\right)$: h est **décroissante**. De même sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$, h est **décroissante**.

Exercice 9

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $D_g = [-3; +\infty[$. $f(x) = \frac{0 \cdot x + 1}{x + 3}$ est homographique avec $\Delta = 0 \times 3 - 1 \times 1 = -1 < 0$: f est strictement décroissante sur $] -\infty; -3[$ et sur $] -3; +\infty[$. g est strictement croissante sur $[-3; +\infty[$.

2) $f(-2) = 1$ et $g(-2) = \sqrt{1} = 1$: $A(-2; 1)$ appartient aux deux courbes.

3) Voir la figure.



4) Pour $x \geq -3$, posons $t = \sqrt{x+3} \geq 0$: l'inéquation s'écrit $t^3 \leq 1$. La fonction cube est strictement croissante, donc $t^3 \leq 1 \iff t \leq 1 \iff x+3 \leq 1 \iff x \leq -2$. Ainsi $S = [-3; -2]$. (Graphiquement, pour $x > -3$ l'inéquation équivaut à $g(x) \leq f(x)$: (C_g) est au-dessous de (C_f) à gauche de A .)

5) $x \in D_h \iff x \geq -3$ et $\sqrt{x+3} \neq -3$, toujours vrai : $D_h = [-3; +\infty[$ et $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}+3}$.

6) g est croissante sur $[-3; +\infty[$ et $g([-3; +\infty[) = [0; +\infty[\subset]-3; +\infty[$, intervalle où f est décroissante : h est **décroissante** sur $[-3; +\infty[$. Pour tout $x \in D_h$, $h(x) > 0$ (minorée par 0) et, h étant décroissante, $h(x) \leq h(-3) = \frac{1}{3}$: le maximum de h est $\frac{1}{3}$, atteint en -3 .

Exercice 10

1) $D_f = [-2; +\infty[$.

2) $(\sqrt{x+2}-2)^2 = (x+2) - 4\sqrt{x+2} + 4 = x - 4\sqrt{x+2} + 6 = f(x)$.

3) $f = v \circ u$ avec $u(x) = \sqrt{x+2}$ (croissante sur D_f) et $v(t) = (t-2)^2$ (décroissante sur $] -\infty; 2]$, croissante sur $[2; +\infty[$). Sur $[-2; 2]$: $u([-2; 2]) = [0; 2] \subset] -\infty; 2]$: sens contraires, f est **décroissante**. Sur $[2; +\infty[$: $u([2; +\infty[) = [2; +\infty[$: même sens, f est **croissante**. Comme $f(x) \geq 0$ et $f(2) = 0$, le minimum de f est 0, atteint en 2.

x	-2	2	$+\infty$
$f(x)$	4	0	

Exercice 11

Partie 1.

1) $x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 > 0$: $D_f = \mathbb{R}$.

2) $3 - f(x) = \frac{3(x^2 + 2x + 4) - (x^2 - 2x + 4)}{x^2 + 2x + 4} = \frac{2(x+2)^2}{x^2 + 2x + 4} \geq 0$; et $f(-2) = \frac{12}{4} = 3$: 3 est le maximum de f .

3) $f(x) - \frac{1}{3} = \frac{3(x^2 - 2x + 4) - (x^2 + 2x + 4)}{3(x^2 + 2x + 4)} = \frac{2(x-2)^2}{3(x^2 + 2x + 4)} \geq 0$; et $f(2) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$: $\frac{1}{3}$ est le minimum de f .

4) $1 - \frac{4x}{x^2 + 2x + 4} = \frac{x^2 + 2x + 4 - 4x}{x^2 + 2x + 4} = f(x)$.

5) Notons $A = x^2 + 2x + 4$, $B = y^2 + 2y + 4$. $\frac{x}{A} - \frac{y}{B} = \frac{x(y^2 + 2y + 4) - y(x^2 + 2x + 4)}{AB} = \frac{xy(y-x) + 4(x-y)}{AB} = \frac{(x-y)(4-xy)}{AB}$. Donc $f(x) - f(y) = -4 \left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B} \right) = \frac{4(x-y)(xy-4)}{AB}$, d'où le résultat.

6) $AB > 0$. Si $x \neq y$ sont dans $[-2; 2] : |xy| \leq 4$, et $xy = 4$ imposerait $x = y = 2$ ou $x = y = -2$; donc $xy < 4$ et $T < 0 : f$ est strictement décroissante sur $[-2; 2]$. Si $x \neq y$ sont dans $[2; +\infty[$, l'un d'eux est > 2 , donc $xy > 4$ et $T > 0 : f$ est strictement croissante sur $[2; +\infty[$.

7)

x	-2	2	$+\infty$
$f(x)$	3	$\frac{1}{3}$	

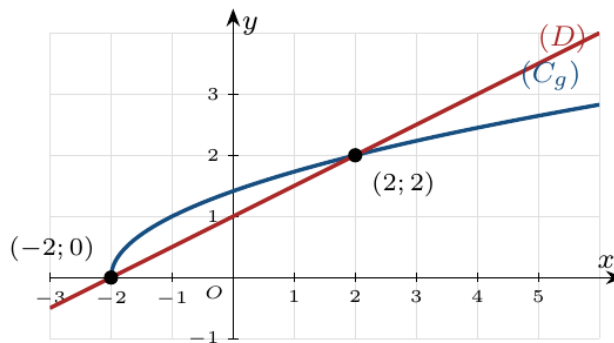
Partie 2.

1) $g(-2) = 0 ; g(2) = 2$.

2) g est croissante sur $[-2; +\infty[: g([-2; -1]) = [g(-2); g(-1)] = [0; 1]$. Pour $y \geq 2$, $g(x) = y \iff x = y^2 - 2$, et $y^2 - 2 \geq 2$; réciproquement $x \geq 2 \Rightarrow g(x) \geq 2 : g([2; +\infty[) = [2; +\infty[$.

x	-2	$+\infty$
$g(x)$	0	

3) Voir la figure.



4) Pour $x \geq -2$, les deux membres sont positifs ($\frac{1}{2}x + 1 = \frac{x+2}{2} \geq 0$), donc $\sqrt{x+2} = \frac{x+2}{2} \iff x+2 = \frac{(x+2)^2}{4} \iff (x+2)(x+2-4) = 0 \iff x \in \{-2; 2\}$.

5) Pour $x \in [-2; 2] : g(x) - \frac{x+2}{2} = \sqrt{x+2} \left(1 - \frac{\sqrt{x+2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{x+2}(2 - \sqrt{x+2})}{2} \geq 0$, car $0 \leq \sqrt{x+2} \leq 2$.
Donc (C_g) est au-dessus de (D) sur $[-2; 2]$ (points communs en -2 et 2).

Partie 3.

1) $D_f = \mathbb{R}$, donc $D_{f \circ g} = D_g = [-2; +\infty[$. Pour $x \geq -2$, avec $t = \sqrt{x+2}$, $t^2 = x+2 : f(t) = \frac{t^2 - 2t + 4}{t^2 + 2t + 4} = \frac{x+6-2\sqrt{x+2}}{x+6+2\sqrt{x+2}} = h(x)$. Le dénominateur est $> 0 : D_h = [-2; +\infty[$ et $h = f \circ g$.

2) Sur $[-2; 2] : g$ est croissante et $g([-2; 2]) = [0; 2] \subset [-2; 2]$, où f est décroissante : h est **décroissante**. Sur $[2; +\infty[: g([2; +\infty[) = [2; +\infty[$, où f est croissante : h est **croissante**.

Exercice 12

1) $D_f = \mathbb{R}_+ (\sqrt{x} + 3 > 0)$. $3 - \frac{8}{\sqrt{x} + 3} = \frac{3\sqrt{x} + 9 - 8}{\sqrt{x} + 3} = f(x)$.

2) $\frac{8}{\sqrt{x} + 3} > 0$ donc $f(x) < 3$. Et $\sqrt{x} + 3 \geq 3$ donne $\frac{8}{\sqrt{x} + 3} \leq \frac{8}{3}$, donc $f(x) \geq 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$.

3) $f(x) = v(\sqrt{x}) : f = v \circ r$ avec $r(x) = \sqrt{x}$. r est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $r(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+ \subset]-3; +\infty[$; v est homographique avec $\Delta = 3 \times 3 - 1 \times 1 = 8 > 0$, donc croissante sur $] -3; +\infty[$. Même sens : f est **croissante** sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 13

1) $x + 5 \geq 0$ et $x - 3 \geq 0 \iff x \geq 3 : D_f = [3; +\infty[$.

2) $f(x) = \frac{(x+5) - (x-3)}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}} = \frac{8}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}}$ (dénominateur $\geq \sqrt{8} > 0$).

3) Numérateur et dénominateur sont strictement positifs : $f(x) > 0$.

4) 0 est un minorant de f , mais l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution (question 3) : 0 n'est **pas** le minimum de f .

5) Pour $x \geq 3 : \sqrt{x+5} \geq 2\sqrt{2}$ et $\sqrt{x-3} \geq 0$, donc $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3} \geq 2\sqrt{2}$ et $f(x) \leq \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. Or $f(3) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$: le maximum de f est $2\sqrt{2}$, atteint en 3.

Exercice 14

1) $x^2 + 4 > 0 : D_f = \mathbb{R}$, symétrique, et $f(-x) = -f(x) : f$ est impaire.

2) $1 - f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 4} = \frac{(x-2)^2}{x^2 + 4} \geq 0$.

3) Pour $x \neq 0 : f\left(\frac{4}{x}\right) = \frac{\frac{16}{x^2}}{\frac{16}{x^2} + 4} = \frac{16x}{16 + 4x^2} = \frac{4x}{x^2 + 4} = f(x)$.

4) $f(1) = f(4) = \frac{4}{5}$ (question 3 avec $x = 1$) et $1 \neq 4 : f$ n'est **pas injective**. Le réel 2 n'a pas d'antécédent puisque $f(x) \leq 1 : f$ n'est **pas surjective**.

5) $f(x) - f(y) = \frac{4x(y^2 + 4) - 4y(x^2 + 4)}{(x^2 + 4)(y^2 + 4)} = \frac{4(x-y)(4-xy)}{(x^2 + 4)(y^2 + 4)}$; on divise par $x - y$.

6) Si $x \neq y$ sont dans $[0; 2] : 0 \leq xy < 4$, donc $T > 0 : f$ est strictement croissante sur $[0; 2]$. Si $x \neq y$ sont dans $[2; +\infty[: xy > 4$, $T < 0 : f$ est strictement décroissante sur $[2; +\infty[$. Par imparité : croissante sur $[-2; 0]$, décroissante sur $] -\infty; -2]$. $f(2) = 1$, $f(-2) = -1$:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f(x)$			1	
		$\swarrow$	$\nwarrow$	$\searrow$
			-1	

7) Posons $t = a + b \geq 2\sqrt{3} > 0$. Alors $\frac{t^2 + 4}{t} = \frac{4}{f(t)}$. Comme $2 \leq 2\sqrt{3} \leq t$ et f est décroissante sur $[2; +\infty[$:

$0 < f(t) \leq f(2\sqrt{3}) = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $\frac{4}{f(t)} \geq \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

8) Pour $x \geq 2 : g(x) > 0$ et $g(x) \leq 1$, donc g est à valeurs dans $]0; 1]$. Soit $y \in]0; 1] : g(x) = y \iff yx^2 - 4x + 4y = 0$. Le discriminant réduit est $4 - 4y^2 \geq 0$; les racines sont $x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{1-y^2}}{y}$ et $x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{1-y^2}}{y}$, de produit $x_1 x_2 = 4$. On a $x_2 \geq \frac{2}{y} \geq 2$, donc $x_1 = \frac{4}{x_2} \leq 2$, avec égalité seulement si $y = 1$, cas où $x_1 = x_2 = 2$. Ainsi

l'équation a **une unique** solution dans $[2; +\infty[: g$ est bijective et

$$g^{-1} :]0; 1] \rightarrow [2; +\infty[, \quad g^{-1}(y) = \frac{2 + 2\sqrt{1-y^2}}{y}.$$

Exercice 15

1) $D_f = \mathbb{R}_+ ; 4 - \frac{11}{\sqrt{x}+2} = \frac{4\sqrt{x}+8-11}{\sqrt{x}+2} = f(x).$

2) $\frac{11}{\sqrt{x}+2} > 0$ donc $f(x) < 4$. $\sqrt{x}+2 \geq 2$ donne $\frac{11}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{11}{2}$, donc $f(x) \geq 4 - \frac{11}{2} = -\frac{3}{2}$ (atteint en 0).

3) $\frac{1}{4} - \frac{|x|}{x^2+4} = \frac{x^2-4|x|+4}{4(x^2+4)} = \frac{(|x|-2)^2}{4(x^2+4)} \geq 0$. Donc $|g(x)| = \frac{|x|}{x^2+4} |\cos x| \leq \frac{1}{4} \times 1 : -\frac{1}{4} \leq g(x) \leq \frac{1}{4}$, g est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16

1) $x^2 + 3 > 0 : D_f = \mathbb{R}$.

2) $f(x) + \frac{1}{2} = \frac{2x-2+x^2+3}{2(x^2+3)} = \frac{(x+1)^2}{2(x^2+3)} \geq 0$, et $f(-1) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} : -\frac{1}{2}$ est le minimum de f .

3) $\frac{1}{6} - f(x) = \frac{x^2+3-6x+6}{6(x^2+3)} = \frac{(x-3)^2}{6(x^2+3)} \geq 0$, et $f(3) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} : \frac{1}{6}$ est le maximum de f .

4) $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{6} \leq \frac{1}{2}$, donc $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$.

5) (C_f) est entièrement située dans la bande comprise entre les droites d'équations $y = -\frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$; elle touche la première au point $(-1; -\frac{1}{2})$.

Exercice 17

1) $f(x)$ existe $\iff E(x) \neq -2 \iff x \notin [-2; -1[: D_f =]-\infty; -2[\cup]-1; +\infty[.$

2) $g(x)$ existe $\iff x - E(x) > 0$. Comme $x - E(x) \geq 0$, avec égalité si et seulement si x est entier : $D_g = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Exercice 18

Si x est solution, $k = \frac{x+1}{3}$ est un entier et $x = 3k - 1$. L'équation devient $E\left(\frac{3k+2}{4}\right) = k$, soit $k \leq \frac{3k+2}{4} < k+1 \iff 4k \leq 3k+2 < 4k+4 \iff -2 < k \leq 2$. Donc $k \in \{-1; 0; 1; 2\}$; réciproquement, ces valeurs conviennent. $S = \{-4; -1; 2; 5\}$. (Contrôle : $x = 5 : E(2) = 2 = \frac{6}{3}$.)

Exercice 19

1) $E(x) \leq x < E(x) + 1$ donne $0 \leq x - E(x) < 1$: la fonction est bornée.

2) $g(x)$ existe $\iff x + 1 > 0 : D_g =]-1; +\infty[.$

3) $g(x) \geq 0$ car numérateur ≥ 0 et dénominateur > 0 . Si $x \in]-1; 0[: E(x) = -1$ et $g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} < 1$.

Si $x \geq 0 : \sqrt{x+1} \geq 1$, donc $g(x) \leq x - E(x) < 1$. Ainsi $0 \leq g(x) < 1$ sur D_g .

4) $\frac{2n+1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$ et $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$, donc $1 \leq \frac{2n+1}{n+1} < 2 : E\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = 1$. Et $0 \leq \frac{n}{2n+1} < \frac{1}{2} < 1 : E\left(\frac{n}{2n+1}\right) = 0$.

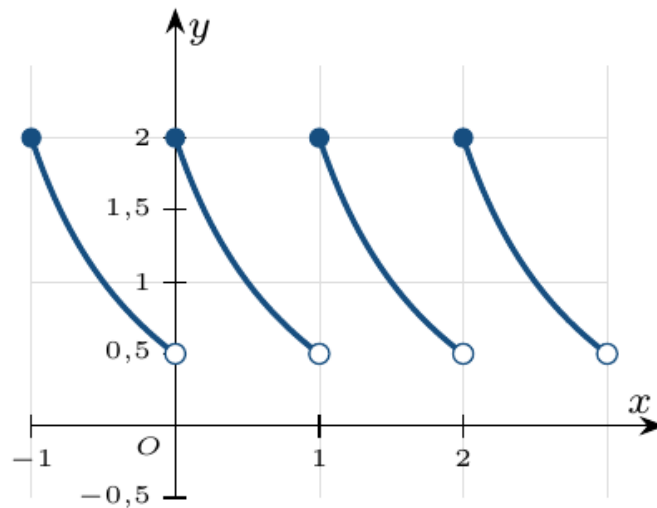
Exercice 20

1) $x - E(x) + 1 \geq 1 > 0 : D_f = \mathbb{R}$.

2) Pour tout $x, x \pm 1 \in \mathbb{R}$ et $E(x+1) = E(x)+1$, donc $E(x+1)-(x+1) = E(x)-x$ et $(x+1)-E(x+1) = x-E(x) : f(x+1) = f(x)$.

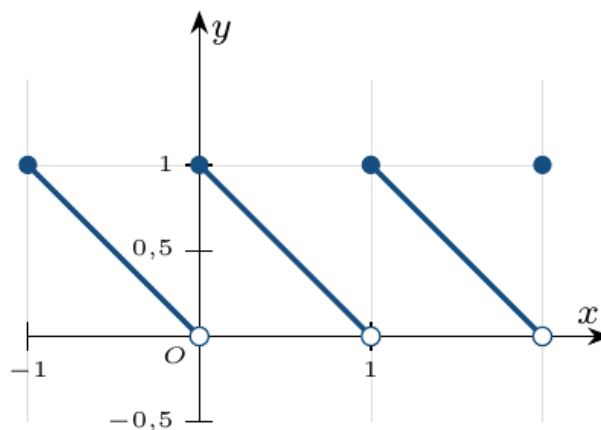
3) Pour $x \in [0; 1[$, $E(x) = 0 : f(x) = \frac{2-x}{x+1}$.

4) On trace l'arc d'hyperbole $y = \frac{2-x}{x+1}$ sur $[0; 1[$ (de $(0; 2)$ inclus à $(1; \frac{1}{2})$ exclu), puis on le translate de $-1, 1$ et 2 unités horizontalement.



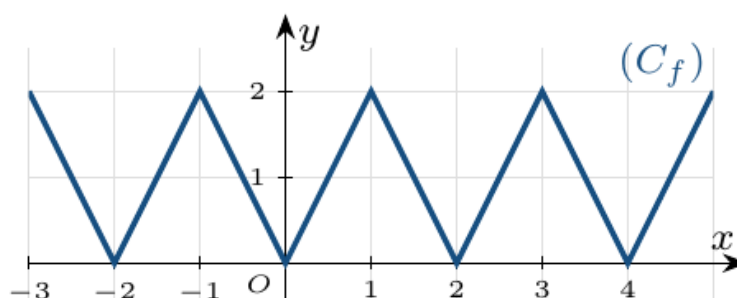
Exercice 21

- 1) $f(x+1) = E(x) + 1 + 1 - (x+1) = E(x) + 1 - x = f(x)$.
- 2) Pour $x \in [0; 1[$: $f(x) = 1 - x$.
- 3) Segments de pente -1 allant de $(k; 1)$ (inclus) à $(k+1; 0)$ (exclu) :



Exercice 22

- 1) $E(x+2) = E(x) + 2$, donc $(-1)^{E(x+2)} = (-1)^{E(x)}$ et $2(x+2) - 2E(x+2) - 1 = 2x - 2E(x) - 1$: $f(x+2) = f(x)$.
- 2) Pour $x \in [0; 1[$: $E(x) = 0$, $f(x) = 2x - 1 + 1 = 2x$. Pour $x \in [1; 2[$: $E(x) = 1$, $f(x) = -(2x - 3) + 1 = 4 - 2x$.
- 3) Sur $[0; 2]$ on obtient un « triangle » joignant $(0; 0)$, $(1; 2)$ et $(2; 0)$; par périodicité, la courbe est une ligne brisée en dents de scie.



Exercice 23

- 1)** $(\Rightarrow)$ Si $m \leq f(x) \leq M$ sur D , posons $K = \max(|m|; |M|) \geq 0$: $-K \leq m \leq f(x) \leq M \leq K$, donc $|f(x)| \leq K$.
 $(\Leftarrow)$ Si $|f(x)| \leq K$, alors $-K \leq f(x) \leq K$: f est minorée par $-K$ et majorée par K .
- 2)** $g(x) = (x - 3)^2 - 8 \geq -8$: g est minorée. Supposons g majorée par un réel M . Pour $x = 3 + \sqrt{|M| + 9}$:
 $g(x) = |M| + 9 - 8 = |M| + 1 > M$, contradiction. Donc g n'est pas majorée, donc pas bornée.