

Corrigé détaillé de la série — Chapitre 03

Les applications

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — méthodes utilisées

- **Injectivité** : on suppose $f(x) = f(x')$ et on démontre $x = x'$; pour la nier, on exhibe $x \neq x'$ de même image.
- **Surjectivité** : on fixe y dans l'ensemble d'arrivée, on résout $f(x) = y$ et on **vérifie** que la solution appartient à l'ensemble de départ. Si l'équation a exactement une solution dans le départ pour tout y , f est bijective et cette solution est $f^{-1}(y)$.
- **Images** : $f(A) = C$ se montre par double inclusion ; $x \in f^{-1}(C) \iff f(x) \in C$.
- Les résultats des exercices 10 à 14 ont été contrôlés par programme (test exhaustif sur de petits ensembles), et tous les calculs par sympy.

Exercice 1

f est à valeurs dans $]3; +\infty[$: pour $x > 2$, $f(x) = 3 + \frac{6}{x-2} > 3$.

1) Soient $x, x' > 2$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors $3x(x' - 2) = 3x'(x - 2)$, soit $-6x = -6x'$, donc $x = x'$: f est injective.

2) Soit $y > 3$. Pour $x > 2$: $f(x) = y \iff 3x = y(x - 2) \iff x(y - 3) = 2y \iff x = \frac{2y}{y - 3}$ (car $y \neq 3$). Ce réel vérifie $x - 2 = \frac{6}{y - 3} > 0$, donc $x \in]2; +\infty[$: f est surjective.

3) f est injective et surjective, donc bijective, et d'après 2) : $f^{-1} :]3; +\infty[\rightarrow]2; +\infty[$, $y \mapsto \frac{2y}{y - 3}$.

Exercice 2

Pour $x \geq 0$, $\sqrt{x} + 1 \geq 1 > 0$: f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$, et $f(x) = 3 - \frac{5}{\sqrt{x} + 1}$.

1.a) Pour $x \geq 0$: $f(x) = 3 \iff 3\sqrt{x} - 2 = 3\sqrt{x} + 3 \iff -2 = 3$: impossible. $f(x) = 1 \iff 3\sqrt{x} - 2 = \sqrt{x} + 1 \iff \sqrt{x} = \frac{3}{2} \iff x = \frac{9}{4}$. Donc $f^{-1}(\{3; 1\}) = \left\{\frac{9}{4}\right\}$.

1.b) Le réel 3 de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ n'a pas d'antécédent : f n'est pas surjective.

2) $f(\mathbb{R}_+) \subset [-2; 3[$: pour $x \geq 0$, $\sqrt{x} + 1 \geq 1$, donc $0 < \frac{5}{\sqrt{x} + 1} \leq 5$ et $-2 \leq f(x) < 3$. $[-2; 3[\subset f(\mathbb{R}_+)$: soit $y \in [-2; 3[$. Pour $x \geq 0$:

$$f(x) = y \iff 3\sqrt{x} - 2 = y\sqrt{x} + y \iff \sqrt{x}(3 - y) = y + 2 \iff \sqrt{x} = \frac{y + 2}{3 - y} \iff x = \left(\frac{y + 2}{3 - y}\right)^2,$$

car $3 - y > 0$ et $\frac{y + 2}{3 - y} \geq 0$. Ce réel est dans $\mathbb{R}_+$. Donc $f(\mathbb{R}_+) = [-2; 3[$.

3.a) Soient $x, x' \geq 0$ avec $g(x) = g(x')$: $\frac{5}{\sqrt{x} + 1} = \frac{5}{\sqrt{x'} + 1}$, donc $\sqrt{x} = \sqrt{x'}$, puis $x = x'$: g est injective.

3.b) D'après 2), $g(\mathbb{R}_+) = [-2; 3[$: g est surjective, donc bijective, et $g^{-1} : [-2; 3[\rightarrow \mathbb{R}_+$, $y \mapsto \left(\frac{y + 2}{3 - y}\right)^2$.
(Contrôle : $g^{-1}(1) = \frac{9}{4}$, conforme à 1.a.)

Exercice 3

1.a) Pour $x, x' \geq 2$: $f(x) - f(x') = (x - x') + \frac{4(x' - x)}{xx'} = (x - x') \frac{xx' - 4}{xx'}$. Supposons $f(x) = f(x')$ et $x \neq x'$: alors $xx' = 4$. Or $x \geq 2$ et $x' \geq 2$ donnent $xx' \geq 4$ avec égalité seulement si $x = x' = 2$: contradiction. Donc $x = x'$ et f est injective.

1.b) Valeurs : $f(x) - 4 = \frac{x^2 - 4x + 4}{x} = \frac{(x - 2)^2}{x} \geq 0$. Soit $y \geq 4$. Pour $x \geq 2$: $f(x) = y \iff x^2 - yx + 4 = 0$.

Le discriminant $\Delta = y^2 - 16$ est positif ou nul ; la solution $x_0 = \frac{y + \sqrt{y^2 - 16}}{2}$ vérifie $x_0 \geq \frac{y}{2} \geq 2$. Donc $f(x_0) = y$ avec $x_0 \in [2; +\infty[$: f est surjective.

1.c) f est injective et surjective, donc bijective. L'unique antécédent de y est x_0 (l'autre racine vaut $\frac{4}{x_0} \leq 2$ et n'est égale à 2 que si $x_0 = 2$) : $f^{-1} : [4; +\infty[\rightarrow [2; +\infty[$, $y \mapsto \frac{y + \sqrt{y^2 - 16}}{2}$.

2.a) Pour $x \geq -1$, $h(x) = x + 3 \geq 2$: h va bien de $[-1; +\infty[$ dans $[2; +\infty[$, et $f \circ h : [-1; +\infty[\rightarrow [4; +\infty[$ vérifie

$$(f \circ h)(x) = x + 3 + \frac{4}{x + 3} = \frac{(x + 3)^2 + 4}{x + 3} = \frac{x^2 + 6x + 13}{x + 3} = g(x).$$

Même départ, même arrivée, mêmes images : $g = f \circ h$. Pour $y \geq 2$, l'équation $x + 3 = y$ a l'unique solution $x = y - 3 \geq -1$: h est bijective, $h^{-1}(y) = y - 3$.

2.b) $g = f \circ h$ est la composée de deux bijections, donc une bijection, et $g^{-1} = h^{-1} \circ f^{-1} : g^{-1} : [4; +\infty[\rightarrow [-1; +\infty[$, $y \mapsto \frac{y + \sqrt{y^2 - 16}}{2} - 3$.

Exercice 4

Pour tout réel x , $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$: f est définie sur $\mathbb{R}$.

1.a) $f(x) = 1 \iff 2x^2 = x^2 + 2x + 2 \iff x^2 - 2x - 2 = 0 \iff x \in \{1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}\}$.

1.b) $f(1 - \sqrt{3}) = f(1 + \sqrt{3}) = 1$ avec $1 - \sqrt{3} \neq 1 + \sqrt{3}$: f n'est pas injective.

2.a) $f(x) \geq 0$ (quotient d'un carré par un réel strictement positif) et $4 - f(x) = \frac{2x^2 + 8x + 8}{x^2 + 2x + 2} = \frac{2(x + 2)^2}{x^2 + 2x + 2} \geq 0$. Donc $f(\mathbb{R}) \subset [0; 4]$.

2.b) $-1 \notin [0; 4]$ n'a pas d'antécédent : f n'est pas surjective.

3) Valeurs : pour $x > 0$, $g(x) > 0$ et $2 - g(x) = \frac{4x + 4}{x^2 + 2x + 2} > 0$, donc $g(x) \in]0; 2[$. Soit $y \in]0; 2[$. Pour $x > 0$: $g(x) = y \iff (2 - y)x^2 - 2yx - 2y = 0$. Le discriminant réduit vaut $\Delta' = y^2 + 2y(2 - y) = y(4 - y) > 0$: deux racines, de produit $\frac{-2y}{2 - y} < 0$, donc **une seule racine strictement positive** :

$$x = \frac{y + \sqrt{4y - y^2}}{2 - y}.$$

Chaque $y \in]0; 2[$ a exactement un antécédent dans $]0; +\infty[$: g est bijective et $g^{-1} :]0; 2[\rightarrow]0; +\infty[$, $y \mapsto \frac{y + \sqrt{4y - y^2}}{2 - y}$.

Exercice 5

1) Soient $(x; y), (x'; y') \in I^2$ tels que $f(x; y) = f(x'; y') : xy = x'y'$ et $\frac{4x}{y} = \frac{4x'}{y'}$. En multipliant membre à membre : $4x^2 = 4x'^2$, donc $x = x'$ (réels positifs), puis $y = \frac{xy}{x} = y'$. f est injective.

2) Soit $(u; v) \in I^2$. On cherche $(x; y) \in I^2$ tel que $xy = u$ et $\frac{4x}{y} = v$. Nécessairement $4x^2 = uv$, d'où $x = \frac{\sqrt{uv}}{2}$ et $y = \frac{u}{x} = 2\sqrt{\frac{u}{v}}$. Réciproquement, ces réels sont strictement positifs, $xy = \sqrt{uv}\sqrt{\frac{u}{v}} = u$ et $\frac{4x}{y} = \frac{2\sqrt{uv}}{2\sqrt{u/v}} = v$. Donc f est surjective ; étant injective, elle est bijective et

$$f^{-1} : I^2 \rightarrow I^2, \quad (u; v) \mapsto \left(\frac{\sqrt{uv}}{2}; 2\sqrt{\frac{u}{v}} \right).$$

Exercice 6

1.a) $x^2 + 4x - 1 = -1 \iff x(x+4) = 0 \iff x \in \{-4; 0\}$.

1.b) $f(-4) = f(0)$ avec $-4 \neq 0$: f n'est pas injective.

2) $f(x) = (x+2)^2 - 5 \geq -5$, donc $f(\mathbb{R}) \subset [-5; +\infty[$. Pour $y \geq -5$, $x = -2 + \sqrt{y+5}$ vérifie $f(x) = (\sqrt{y+5})^2 - 5 = y$: $[-5; +\infty[\subset f(\mathbb{R})$. Donc $f(\mathbb{R}) = [-5; +\infty[$.

3.a) Soit $y \geq -5$. Pour $x \geq -2$: $g(x) = y \iff (x+2)^2 = y+5 \iff x+2 = \sqrt{y+5}$ (car $x+2 \geq 0$) $\iff x = -2 + \sqrt{y+5}$. Chaque y a exactement un antécédent dans $[-2; +\infty[$: g est bijective.

3.b) $g^{-1} : [-5; +\infty[\rightarrow [-2; +\infty[$, $y \mapsto -2 + \sqrt{y+5}$.

Exercice 7

1.a) $x^2 < x^2 + 4$ et la racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $|x| < \sqrt{x^2 + 4}$; comme $-x \leq |x|$, on obtient $-x < \sqrt{x^2 + 4}$.

1.b) Posons $S = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{y^2 + 4} > 0$. D'après 1.a, $-x < \sqrt{x^2 + 4}$ et $-y < \sqrt{y^2 + 4}$; en ajoutant : $-(x+y) < S$, d'où, en divisant par $S > 0$: $\frac{x+y}{S} > -1$.

2.a) $f(x) - f(y) = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{y^2 + 4} + (x - y) = \frac{x^2 - y^2}{S} + (x - y) = (x - y) \left(\frac{x + y}{S} + 1 \right)$ (expression conjuguée).

2.b) Si $f(x) = f(y)$, alors $(x - y) \left(\frac{x+y}{S} + 1 \right) = 0$; or $\frac{x+y}{S} + 1 > 0$ d'après 1.b, donc $x = y$: f est injective.

3) D'après 1.a, $f(x) > 0$ pour tout x : le réel -1 n'a pas d'antécédent, f n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

4) f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Soit $y > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = y \iff \sqrt{x^2 + 4} = y - x \iff \begin{cases} y - x \geq 0 \\ x^2 + 4 = y^2 - 2xy + x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq y \\ x = \frac{y^2 - 4}{2y} \end{cases}$$

Or $y - \frac{y^2 - 4}{2y} = \frac{y^2 + 4}{2y} > 0$: la condition $x \leq y$ est satisfaite. Chaque $y > 0$ a exactement un antécédent : f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{y^2 - 4}{2y}$.

Exercice 8

1) $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$: f est définie sur $\mathbb{R}$. Pour $x \neq 0$, en multipliant numérateur et dénominateur par x^2 :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} = \frac{x}{1 + x + x^2} = f(x).$$

2) $f(2) = \frac{2}{7}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2) = \frac{2}{7}$ avec $2 \neq \frac{1}{2}$: f n'est pas injective.

Exercice 9

1.a) Le discriminant de $X^2 - aX - 4b^2$ est $a^2 + 16b^2 > 0$ (car $b \neq 0$) : deux racines distinctes, dont le produit vaut $-4b^2 < 0$; elles sont donc de signes contraires.

1.b) Soit $(a; b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Cas $b > 0$. Soit $X_0 > 0$ la racine positive de 1.a. Posons $x = \sqrt{X_0} > 0$ et $y = \frac{b}{x} > 0$. Alors $xy = b$ et $x^2 - 4y^2 = X_0 - \frac{4b^2}{X_0} = \frac{X_0^2 - 4b^2}{X_0} = \frac{aX_0}{X_0} = a$ (car $X_0^2 = aX_0 + 4b^2$). Cas $b = 0$. Si $a \geq 0$: $f(\sqrt{a}; 0) = (a; 0)$. Si $a < 0$: $f\left(0; \frac{\sqrt{-a}}{2}\right) = (a; 0)$. Tout couple de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ a un antécédent : f est surjective.

2) Oui. Supposons $f(x; y) = f(x'; y') = (a; b)$. Si $b > 0$: $x, y, x', y' > 0$, et $X = x^2$ vérifie $X^2 - aX - 4b^2 = 0$ (car $y = \frac{b}{x}$); X est donc la racine positive X_0 , de même pour x'^2 . Ainsi $x = x' = \sqrt{X_0}$ et $y = y' = \frac{b}{x}$. Si $b = 0$: $xy = 0$. Si $a > 0$, alors $y = 0$ (sinon $x = 0$ et $-4y^2 = a > 0$, impossible) et $x = \sqrt{a}$; si $a < 0$, alors $x = 0$ et

$y = \frac{\sqrt{-a}}{2}$; si $a = 0$, $x^2 = 4y^2$ et $xy = 0$ donnent $x = y = 0$. Dans chaque cas le couple est unique. Donc f est injective (et finalement bijective).

Exercice 10

- 1) Si $M = \emptyset$, $f(M)$ ne contient aucun élément. Si $M \neq \emptyset$, soit $x \in M : f(x) \in f(M)$, donc $f(M) \neq \emptyset$ (contraposée).
- 2) Soit $y \in f(M) : y = f(x)$ avec $x \in M \subset N$, donc $y \in f(N)$.
- 3) $M \subset M \cup N$ et $N \subset M \cup N$ donnent (par 2) $f(M) \cup f(N) \subset f(M \cup N)$. Réciproquement, si $y = f(x)$ avec $x \in M \cup N$, alors $x \in M$ (et $y \in f(M)$) ou $x \in N$ (et $y \in f(N)$).
- 4) $M \cap N \subset M$ et $M \cap N \subset N$, donc par 2) : $f(M \cap N) \subset f(M) \cap f(N)$.
- 5) $f^{-1}(F) = \{x \in E / f(x) \in F\} = E$, car $f(x) \in F$ pour tout $x \in E$.
- 6) $f^{-1}(\emptyset) = \{x \in E / f(x) \in \emptyset\} = \emptyset$.
- 7) $x \in f^{-1}(P) \implies f(x) \in P \subset Q \implies x \in f^{-1}(Q)$.
- 8) $x \in f^{-1}(P \cup Q) \iff (f(x) \in P \text{ ou } f(x) \in Q) \iff x \in f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q)$.
- 9) Même raisonnement avec « et » : $x \in f^{-1}(P \cap Q) \iff x \in f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q)$.
- 10) $x \in M \implies f(x) \in f(M) \implies x \in f^{-1}(f(M))$.
- 11) Soit $y \in f(f^{-1}(P)) : y = f(x)$ avec $x \in f^{-1}(P)$, c'est-à-dire $f(x) \in P$; donc $y \in P$.
- 12) Soit $y \in f(M) \setminus f(N) : y = f(x)$ avec $x \in M$, et $x \notin N$ (sinon $y \in f(N)$). Donc $x \in M \setminus N$ et $y \in f(M \setminus N)$.
- 13) $x \in f^{-1}(P) \setminus f^{-1}(Q) \iff (f(x) \in P \text{ et } f(x) \notin Q) \iff f(x) \in P \setminus Q \iff x \in f^{-1}(P \setminus Q)$.

Remarque

Les inclusions 4, 10, 11 et 12 peuvent être strictes. Exemple avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 : M = \{1\}$ donne $f^{-1}(f(M)) = \{-1; 1\} \neq M$; $P = \{-1; 1\}$ donne $f(f^{-1}(P)) = \{1\} \neq P$. L'exercice 11 caractérise les cas d'égalité.

Exercice 11

- 1) ($\Rightarrow$) L'inclusion $\subset$ est toujours vraie (ex. 10.4). Soit $y \in f(M) \cap f(N) : y = f(x) = f(x')$ avec $x \in M$, $x' \in N$; f injective donne $x = x' \in M \cap N$, donc $y \in f(M \cap N)$. ($\Leftarrow$) Soient x, x' tels que $f(x) = f(x')$. Avec $M = \{x\}$, $N = \{x'\} : f(M \cap N) = f(M) \cap f(N) = \{f(x)\} \neq \emptyset$, donc $M \cap N \neq \emptyset$ (ex. 10.1), c'est-à-dire $x = x'$.
- 2) ($\Rightarrow$) $M \subset f^{-1}(f(M))$ toujours (ex. 10.10). Si $x \in f^{-1}(f(M))$, alors $f(x) = f(x')$ avec $x' \in M$, d'où $x = x' \in M$. ($\Leftarrow$) Si $f(x) = f(x')$, alors $x \in f^{-1}(f(\{x'\})) = \{x'\}$, donc $x = x'$.
- 3) ($\Rightarrow$) $f(f^{-1}(P)) \subset P$ toujours (ex. 10.11). Soit $y \in P$; f surjective donne x tel que $f(x) = y \in P$, donc $x \in f^{-1}(P)$ et $y \in f(f^{-1}(P))$. ($\Leftarrow$) Avec $P = F : F = f(f^{-1}(F)) = f(E)$, donc f est surjective.
- 4) ($\Rightarrow$) $f(M) \setminus f(N) \subset f(M \setminus N)$ toujours (ex. 10.12). Soit $y = f(x)$ avec $x \in M$, $x \notin N$. Si l'on avait $y \in f(N)$, $y = f(x')$ avec $x' \in N$, et l'injectivité donnerait $x = x' \in N$: absurde. Donc $y \in f(M) \setminus f(N)$. ($\Leftarrow$) Par l'absurde : si $f(x) = f(x')$ avec $x \neq x'$, prenons $M = \{x\}$, $N = \{x'\} : f(M \setminus N) = \{f(x)\}$ alors que $f(M) \setminus f(N) = \emptyset$. Contradiction.
- 5) ($\Rightarrow$) Soit $y \in f(E \setminus M) : y = f(x)$, $x \notin M$; si $y \in f(M)$, $y = f(x')$, $x' \in M$, et l'injectivité donne $x = x' : \text{absurde}$; donc $y \in F \setminus f(M)$. Soit $y \in F \setminus f(M)$; par surjectivité $y = f(x)$, et $x \notin M$ (sinon $y \in f(M)$) : $y \in f(E \setminus M)$. ($\Leftarrow$) Avec $M = \emptyset : f(E) = F \setminus \emptyset = F$, donc f est surjective. Si $f(x) = f(x')$ avec $x' \neq x$, prenons $M = \{x\} : x' \in E \setminus M$ donc $f(x') \in F \setminus \{f(x)\}$, ce qui contredit $f(x') = f(x)$. Donc f est injective, et bijective.

Exercice 12

Pour tout $x \in E$, $\chi_A(x) \in \{0; 1\}$, donc $\chi_A^2 = \chi_A$.

- 1) ($\Rightarrow$) évident. ($\Leftarrow$) $x \in A \iff \chi_A(x) = 1 \iff \chi_B(x) = 1 \iff x \in B$.
- 2) Si $x \in \overline{A} : \chi_{\overline{A}}(x) = 1 = 1 - \chi_A(x)$. Si $x \in A : \chi_{\overline{A}}(x) = 0 = 1 - 1$.

- 3.a)** $\chi_A(x)\chi_B(x) = 1 \iff \chi_A(x) = \chi_B(x) = 1 \iff x \in A \cap B$; sinon le produit vaut 0.
- 3.b)** $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, donc $\chi_{A \setminus B} = \chi_A(1 - \chi_B) = \chi_A - \chi_A\chi_B$.
- 3.c)** $A \cup B = \overline{A \cap B}$ (Morgan), donc $\chi_{A \cup B} = 1 - (1 - \chi_A)(1 - \chi_B) = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B$.
- 3.d)** $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ avec $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$; par 3.c et 3.a le terme produit est nul, donc $\chi_{A \Delta B} = (\chi_A - \chi_A\chi_B) + (\chi_B - \chi_A\chi_B) = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B$. Enfin $(\chi_A - \chi_B)^2 = \chi_A^2 - 2\chi_A\chi_B + \chi_B^2 = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B$.
- 4.a)** $\chi_{\overline{A \Delta B}} = (1 - \chi_A - \chi_B)^2$ et $\chi_{A \Delta \overline{B}} = (\chi_A - 1 + \chi_B)^2$: ces deux fonctions sont égales, d'où l'égalité par 1).
- 4.b)** $\chi_{B \Delta A} = \chi_{C \Delta A} \iff \chi_B + \chi_A - 2\chi_A\chi_B = \chi_C + \chi_A - 2\chi_A\chi_C \iff \chi_B(1 - 2\chi_A) = \chi_C(1 - 2\chi_A)$. Or $1 - 2\chi_A(x) \in \{-1; 1\}$ ne s'annule jamais, donc cela équivaut à $\chi_B = \chi_C$, c'est-à-dire $B = C$ (par 1).
- 4.c)** Notons $\alpha = \chi_A, \beta = \chi_B, \gamma = \chi_C$. $\chi_{(A \Delta B) \Delta C} = (\alpha + \beta - 2\alpha\beta) + \gamma - 2(\alpha + \beta - 2\alpha\beta)\gamma = \alpha + \beta + \gamma - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + 4\alpha\beta\gamma$. Cette expression est symétrique en α, β, γ ; le même calcul pour $A \Delta (B \Delta C)$ donne la même expression, d'où l'égalité.
- 4.d)** $\chi_{(A \Delta B) \cap C} = (\alpha + \beta - 2\alpha\beta)\gamma$ et $\chi_{(A \cap C) \Delta (B \cap C)} = \alpha\gamma + \beta\gamma - 2\alpha\gamma\beta\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma - 2\alpha\beta\gamma$ (car $\gamma^2 = \gamma$): égalité.

Exercice 13

- 1)** $u(x) = u(x') \implies v(u(x)) = v(u(x')) \implies x = x'$ (car $v \circ u$ est injective).
- 2)** Soient $y, y' \in F$ avec $v(y) = v(y')$. u étant surjective : $y = u(x), y' = u(x')$. Alors $(v \circ u)(x) = (v \circ u)(x')$, donc $x = x'$ et $y = y'$.
- 3)** Soit $z \in G$: il existe $x \in E$ tel que $z = v(u(x))$; ainsi $z = v(y)$ avec $y = u(x) \in F$.
- 4)** Soit $y \in F$. $v(y) \in G$ et $v \circ u$ est surjective : $v(y) = v(u(x))$ pour un $x \in E$; v étant injective, $y = u(x)$.

Exercice 14

- 1)** Pour $X \in \mathcal{P}(E)$: $(\varphi \circ \varphi)(X) = (X \Delta B) \Delta B = X \Delta (B \Delta B) = X \Delta \emptyset = X$. *Injective* : $\varphi(X) = \varphi(Y) \implies \varphi(\varphi(X)) = \varphi(\varphi(Y)) \implies X = Y$. *Surjective* : tout Y s'écrit $Y = \varphi(\varphi(Y))$. Donc φ est bijective et $\varphi^{-1} = \varphi$.
- 2)** Soit M un point, $M' = t_{\vec{v}}(M)$ et $M'' = t_{\vec{u}}(M')$: $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{v} + \vec{u}$. Donc $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u} + \vec{v}}$; de même $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{v} + \vec{u}} = t_{\vec{u} + \vec{v}}$. Ces deux applications du plan dans le plan sont égales (ici la composition est commutative).

Exercice 15

Soient $x, y \in I$ avec $x \neq y$; par exemple $x < y$: alors $f(x) > f(y)$, donc $f(x) \neq f(y)$ (de même si $y < x$). Ainsi $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$: par contraposée, f est injective. La réciproque est **fausse** : $x \mapsto \frac{1}{x}$ est injective sur $\mathbb{R}^*$ ($\frac{1}{x} = \frac{1}{x'} \implies x = x'$) mais n'est pas monotone sur $\mathbb{R}^*$ ($-1 < 1$ et $f(-1) < f(1)$, alors que $1 < 2$ et $f(1) > f(2)$). Même sur un intervalle : f définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = x$ si $x < 1$ et $f(x) = 3 - x$ si $x \geq 1$ est injective (valeurs $[0; 1[$ puis $[1; 2]$, sans répétition) mais non monotone.

Exercice 16

- 1)** Pour $x \in I, 1 - x \neq 0$: $g(x)$ existe; $g(x) \neq 0$ (numérateur 1) et $g(x) = 1 \iff 1 - x = 1 \iff x = 0 \notin I$. Donc $g(x) \in I$.
- 2)** $(g \circ g)(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x}$; $(g \circ g \circ g)(x) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$.
- 3)** On applique la relation au point $(g \circ g)(x) \in I$: $f((g \circ g)(x)) + f((g \circ g \circ g)(x)) = 2(g \circ g)(x)$, c'est-à-dire $f(x) + f((g \circ g)(x)) = \frac{2x-2}{x}$.
- 4)** On applique la relation au point $g(x) \in I$: $f(g(x)) + f((g \circ g)(x)) = 2g(x) = \frac{2}{1-x}$.

5) Notons (R) la relation de départ. (R) + (3) – (4) donne $2f(x) = 2x + \frac{2x-2}{x} - \frac{2}{1-x}$, donc

$$f(x) = x + \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{x^3 - x + 1}{x(x-1)}.$$

Réciproquement, cette fonction vérifie (R) (calcul direct, contrôlé par symphy) : c'est l'unique solution.

Exercice 17

1) et 2) Comme à l'exercice 16 : $g(x) \in I$, $(g \circ g)(x) = \frac{x-1}{x}$ et $(g \circ g \circ g)(x) = x$.

3) On applique la relation au point $(g \circ g)(x)$: $f((g \circ g)(x)) + f(x) = 2(g \circ g)(x) + 2 + \frac{2}{1 - (g \circ g)(x)}$. Or $\frac{1}{1 - (g \circ g)(x)} = g((g \circ g)(x)) = x$; d'où $f(x) + f((g \circ g)(x)) = 2(g \circ g)(x) + 2 + 2x$.

4) Au point $g(x)$, et puisque $\frac{2}{1-x} = 2g(x)$, $\frac{2}{1-g(x)} = 2(g \circ g)(x)$: $f(x) + f(g(x)) = 2x + 2 + 2g(x)$; $f(g(x)) + f(g \circ g(x)) = 2g(x) + 2 + 2(g \circ g)(x)$; $f(x) + f(g \circ g(x)) = 2(g \circ g)(x) + 2 + 2x$. En ajoutant la première et la troisième puis en retranchant la deuxième : $2f(x) = 4x + 2$, donc $f(x) = 2x + 1$ pour tout $x \in I$.

Exercice 18

Posons $s = n + m$; alors $0 \leq m \leq s$ et $f(n; m) = m + s(s+2)$, donc $s(s+2) \leq f(n; m) \leq s(s+2) + s$. Supposons $f(n; m) = f(n'; m')$ et notons $s = n + m$, $s' = n' + m'$. Si l'on avait $s < s'$, alors $s' \geq s + 1$ et

$$f(n'; m') \geq s'(s' + 2) \geq (s + 1)(s + 3) = s^2 + 4s + 3 > s^2 + 3s \geq f(n; m),$$

ce qui est absurde ; de même $s' < s$ est impossible. Donc $s = s'$, puis $m = f(n; m) - s(s+2) = m'$ et $n = s - m = n'$. f est injective.