

# Corrigé détaillé de la série — Chapitre 02

## Les ensembles

1<sup>ère</sup> Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

### Remarque — méthodes utilisées

- Pour montrer  $X \subset Y$  : on prend  $x \in X$  quelconque et on montre  $x \in Y$ . Pour montrer  $X = Y$  : double inclusion, ou équivalences  $x \in X \iff \dots \iff x \in Y$  (chaque étape étant une loi logique).
- Règles de calcul :  $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ ; Morgan  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ,  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ; distributivité;  $x \in A \Delta B \iff (x \text{ appartient à exactement un des deux ensembles})$ .
- Les résultats de cet exercice ont été vérifiés par programme (force brute sur toutes les parties d'un ensemble à 4 éléments).

### Exercice 1

- 1)  $|3x - 2| \leq 5 \iff -5 \leq 3x - 2 \leq 5 \iff -1 \leq x \leq \frac{7}{3}$ ; avec  $x \in \mathbb{Z}$  :  $A = \{-1; 0; 1; 2\}$ .  
 $(x^2 - 3)(|x| - 4) = 0 \iff x^2 = 3 \text{ ou } |x| = 4 \iff x \in \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}; -4; 4\}$ ; comme  $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$  :  $B = \{-4; 4\}$ .  
 $x^2 - y^2 = 15 \iff (x - y)(x + y) = 15$ . Avec  $x, y \in \mathbb{N}$  :  $x + y \geq 0$ , donc  $x - y > 0$  et  $x - y \leq x + y$ ; les couples de diviseurs sont  $(x - y; x + y) \in \{(1; 15); (3; 5)\}$ , ce qui donne  $(x; y) = (8; 7)$  ou  $(4; 1)$ .  $C = \{(4; 1); (8; 7)\}$ .  
 $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$  impose  $x, y \in \{0; 1; 2; 3\}$ ; on teste :  $D = \{(0; 2); (0; 3); (1; 2); (2; 0); (2; 1); (2; 2); (3; 0)\}$ .
- 2)  $E = \{3^n / n \in \mathbb{N}\}$ ;  $F = \{2^n / n \in \mathbb{Z}\}$ ;  $G = \{7k / k \in \mathbb{Z}\}$ .

### Exercice 2

$A \subset B$  : soit  $x \in A$ ,  $x = 4n + 1$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Alors  $x = 4(n + 2) - 7$  avec  $n' = n + 2 \in \mathbb{Z}$ , donc  $x \in B$ .  $B \subset A$  : soit  $x \in B$ ,  $x = 4n' - 7$ . Alors  $x = 4(n' - 2) + 1$  avec  $n = n' - 2 \in \mathbb{Z}$ , donc  $x \in A$ . Par double inclusion,  $A = B$ .

### Exercice 3

- $E = \{n \in \mathbb{N} / 1 \leq n \leq 30\}$ .  $A$  est l'ensemble des nombres pairs de  $E$  (si  $x = 2k \leq 30$  avec  $k \in E$ , alors  $k \leq 15$ ) :  $A = \{2; 4; 6; \dots; 30\}$ ;  $B = \{5; 10; 15; 20; 25; 30\}$ .
- $\overline{A} = \{1; 3; 5; \dots; 29\}$  (impairs);  $A \cup B = \{2; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 14; 15; 16; 18; 20; 22; 24; 25; 26; 28; 30\}$ ;  $A \cap B = \{10; 20; 30\}$ ;  $\overline{A \cup B} = \{1; 3; 7; 9; 11; 13; 17; 19; 21; 23; 27; 29\}$ .
- $\mathcal{P}(A \cap B) = \{\emptyset; \{10\}; \{20\}; \{30\}; \{10; 20\}; \{10; 30\}; \{20; 30\}; \{10; 20; 30\}\}$ .

### Exercice 4

| Proposition                            | Valeur | Justification                           |
|----------------------------------------|--------|-----------------------------------------|
| $b \in E$                              | V      | $b$ est un élément de $E$               |
| $b \subset E$                          | F      | $b$ est un élément, pas une partie      |
| $\{b\} \in E$                          | F      | les éléments de $E$ sont $a, b, c$      |
| $\{b\} \subset E$                      | V      | car $b \in E$                           |
| $\{b\} \subset \mathcal{P}(E)$         | F      | il faudrait $b \in \mathcal{P}(E)$      |
| $\{b\} \in \mathcal{P}(E)$             | V      | car $\{b\} \subset E$                   |
| $\emptyset \in E$                      | F      | $\emptyset$ n'est pas l'un de $a, b, c$ |
| $\emptyset \subset E$                  | V      | le vide est inclus dans tout ensemble   |
| $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$         | V      | car $\emptyset \subset E$               |
| $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(E)$ | V      | car $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$      |
| $E \in \mathcal{P}(E)$                 | V      | car $E \subset E$                       |
| $E \subset E$                          | V      | toujours                                |
| $\{a; c\} \in \mathcal{P}(E)$          | V      | car $\{a; c\} \subset E$                |
| « $b \in E$ et $c \notin E$ »          | F      | $c \in E$                               |
| $(a; c) \in E \times E$                | V      | $a \in E$ et $c \in E$                  |

### Exercice 5

| Ensemble          | Résultat                                 | Ensemble                               | Résultat                           |
|-------------------|------------------------------------------|----------------------------------------|------------------------------------|
| $A \cap B$        | $\{3; 6; 8\}$                            | $\mathcal{C}_E(A \cap B)$              | $\{1; 2; 4; 5; 7; 9; 10; 11; 12\}$ |
| $A \cap C$        | $\{2; 3\}$                               | $\mathcal{C}_E A \cup \mathcal{C}_E B$ | $\{1; 2; 4; 5; 7; 9; 10; 11; 12\}$ |
| $A \cup B$        | $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 10; 11; 12\}$ | $\mathcal{C}_E(A \cup B)$              | $\{9\}$                            |
| $A \setminus B$   | $\{2; 5; 11; 12\}$                       | $\mathcal{C}_E A \cap \mathcal{C}_E B$ | $\{9\}$                            |
| $B \setminus A$   | $\{1; 4; 7; 10\}$                        | $B \cup C$                             | $\{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 10\}$      |
| $\mathcal{C}_E A$ | $\{1; 4; 7; 9; 10\}$                     | $A \cap (B \cup C)$                    | $\{2; 3; 6; 8\}$                   |
| $\mathcal{C}_E B$ | $\{2; 5; 9; 11; 12\}$                    | $(A \cap B) \cup (A \cap C)$           | $\{2; 3; 6; 8\}$                   |

$\mathcal{P}(C) = \{\emptyset; \{2\}; \{3\}; \{10\}; \{2; 3\}; \{2; 10\}; \{3; 10\}; \{2; 3; 10\}\}$  ( $2^3 = 8$  éléments).

**Constat.** On a obtenu  $\mathcal{C}_E(A \cap B) = \mathcal{C}_E A \cup \mathcal{C}_E B$  et  $\mathcal{C}_E(A \cup B) = \mathcal{C}_E A \cap \mathcal{C}_E B$  (lois de Morgan), ainsi que  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  (distributivité de  $\cap$  par rapport à  $\cup$ ). Ces égalités, constatées ici sur un exemple, sont vraies pour toutes parties  $A, B, C$  de  $E$  (voir le cours); un exemple ne suffit pas à les démontrer.

### Exercice 6

$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) = \{p; q; r; s\}$ .  $B \setminus A = (A \cup B) \setminus A = \{t\}$ , donc  $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B) = \{p; q; t\}$ .  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{r; s; t\}$ . Enfin  $\overline{A} = \{t; u\}$  et  $\overline{B} = \{r; s; u\}$ , donc  $\overline{A} \Delta \overline{B} = \{r; s; t\} = A \Delta B$  (résultat général, exercice 7.9 et cours).

### Exercice 7

- 1)  $A \subset \overline{B} \iff (\forall x) (x \in A \Rightarrow x \notin B) \iff (\forall x) (x \in B \Rightarrow x \notin A)$  (contraposée)  $\iff B \subset \overline{A}$ .
- 2)  $(\Leftarrow)$  si  $A = B$ ,  $A \cup B = A = A \cap B$ .  $(\Rightarrow)$   $A \subset A \cup B \subset A \cap B \subset B$  et de même  $B \subset A \cup B \subset A \cap B \subset A$ , donc  $A = B$ .
- 3)  $(\Leftarrow)$  évident.  $(\Rightarrow)$   $E = A \cap B \subset A \subset E$ , donc  $A = E$ ; de même  $B = E$ .
- 4)  $(\Rightarrow)$   $C \subset A \cup C = A \cap B \subset A$  et  $A \subset A \cup C = A \cap B \subset B$ , donc  $C \subset A \subset B$ .  $(\Leftarrow)$  Si  $C \subset A \subset B$  :  $A \cap B = A$  et  $A \cup C = A$ , d'où l'égalité.
- 5)  $(\Rightarrow)$  Si  $A \setminus B = A$  et  $x \in A \cap B$ , alors  $x \in A = A \setminus B$ , donc  $x \notin B$  : contradiction; donc  $A \cap B = \emptyset$ .  $(\Leftarrow)$  Si  $A \cap B = \emptyset$ , tout  $x \in A$  vérifie  $x \notin B$ , donc  $A \subset A \setminus B \subset A$ .
- 6) a)  $\overline{A} \cup B = E \iff (\forall x \in E) (x \notin A \text{ ou } x \in B) \iff (\forall x \in E) (x \in A \Rightarrow x \in B) \iff A \subset B$ . b)

$$A \cap \overline{B} = \emptyset \iff \overline{A \cap B} = E \iff \overline{A} \cup B = E \iff A \subset B \text{ (Morgan et a).}$$

**7)**  $(\Leftarrow)$  évident.  $(\Rightarrow)$  Soit  $x \in B$ . Si  $x \in \overline{A} : x \in \overline{A} \cap B = \overline{A} \cap C$ , donc  $x \in C$ . Si  $x \in A : x \notin \overline{A}$  et  $x \in B \subset \overline{A} \cup B = \overline{A} \cup C$ , donc  $x \in C$ . Ainsi  $B \subset C$ ; par symétrie  $C \subset B$ .

**8) a)**  $A \cup B = A \cup C \iff B \setminus A = C \setminus A$  (car  $A \cup X = A \cup (X \setminus A)$ , union disjointe)  $\iff \overline{A} \cap B = \overline{A} \cap C \iff \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A} \cap \overline{C}$  (complémentaires dans  $\overline{A} : \overline{A} \cap \overline{X} = \overline{A} \setminus (\overline{A} \cap X)$ )  $\iff A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}$  (même raisonnement qu'au début, avec  $\overline{B}, \overline{C}$ ). **b)** En passant aux complémentaires (bijection  $X \mapsto \overline{X}$ ) :  $\overline{A} \cup B = \overline{A} \cup C \iff \overline{A} \cup B = \overline{A} \cup C \iff A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$ ; or  $A \cap \overline{B} = A \setminus (A \cap B)$ , donc  $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \iff A \cap B = A \cap C$ .

**9)**  $B \cap (A \Delta B) = B \cap [(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})] = \emptyset \cup (B \cap \overline{A}) = B \setminus A$ .  $x \in \overline{A} \Delta B \iff (x \notin A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in B) \iff x \in A \Delta \overline{B}$  (même condition en échangeant les rôles). Donc  $\overline{A} \Delta B = A \Delta \overline{B} (= \overline{A} \Delta \overline{B})$ .

**10)**  $(\Leftarrow)$  évident.  $(\Rightarrow)$  Si  $A \Delta C = B \Delta C$ , alors  $(A \Delta C) \Delta C = (B \Delta C) \Delta C$ ; par associativité de  $\Delta$  (admise dans l'énoncé, démontrée à l'exercice 8.13) et  $C \Delta C = \emptyset : A \Delta \emptyset = B \Delta \emptyset$ , soit  $A = B$ .

**11)**  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .  $(\Leftarrow)$  si  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \Delta B = A \cup B$ .  $(\Rightarrow)$  si  $x \in A \cap B$ , alors  $x \in A \cup B = A \Delta B$ , donc  $x \notin A \cap B$  : contradiction; donc  $A \cap B = \emptyset$ .

**12)**  $(\Rightarrow)$  Tout  $x \in E$  est dans exactement un des deux ensembles :  $x \in B \iff x \notin A$ , donc  $B = \overline{A}$ .  $(\Leftarrow)$   $A \Delta \overline{A} = (A \cap A) \cup (\overline{A} \cap \overline{A}) = A \cup \overline{A} = E$ .

**13)**  $A \setminus C = A \cap \overline{A \cap B} = A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B} = B$  (car  $B \subset A$ ).

**14)** Soit  $x \in A \setminus C$ . Si  $x \in B : x \in B$  et  $x \notin C$ , donc  $x \in B \setminus C \subset D$ . Si  $x \notin B : x \in A \setminus B \subset D$ . Dans les deux cas  $x \in D$ .

**15)** Soit  $x \in A$ . Comme  $B \neq \emptyset$ , choisissons  $b \in B$ . Alors  $(x; b) \in A \times B \subset C \times B$ , donc  $x \in C$ .

**16)**  $(\Leftarrow)$  Si  $A = B$ , évident; si  $A = \emptyset$  ou  $B = \emptyset$ , les deux produits sont vides.  $(\Rightarrow)$  Supposons  $A \neq \emptyset$  et  $B \neq \emptyset$ ; soient  $a \in A$ ,  $b \in B$ . Pour  $x \in A : (x; b) \in A \times B = B \times A$ , donc  $x \in B : A \subset B$ . Pour  $y \in B : (a; y) \in A \times B = B \times A$ , donc  $a \in B$  et  $y \in A : B \subset A$ . Donc  $A = B$ .

## Exercice 8

On raisonne par équivalences sur l'appartenance, ou avec les règles de calcul.

1.  $(A \setminus B) \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B = (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) = (A \cup B) \cap E = A \cup B$ .
2.  $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \Delta B$ .
3.  $(A \cap B) \setminus C = A \cap B \cap \overline{C} = (A \cap \overline{C}) \cap B = (A \setminus C) \cap B$ .
4.  $(A \cup B) \cap \overline{C} = (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C})$  (distributivité).
5.  $A \cap \overline{B} \cup \overline{C} = A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C})$ .
6.  $A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C})$ .
7.  $A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = A \cap (\overline{B} \cup C) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C)$ .
8.  $(A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = A \cap \overline{B} \cup \overline{C} \text{ et } = (A \cap \overline{C}) \cap \overline{B} = (A \setminus C) \setminus B$ .
9.  $A \Delta B \subset A \cup B$ , donc  $(A \cup B) \Delta (A \Delta B) = (A \cup B) \setminus (A \Delta B)$ ; or un élément de  $A \cup B$  qui n'est pas dans exactement un des deux ensembles est dans les deux : c'est  $A \cap B$ .
10.  $A \cap B \subset A$ , donc  $A \Delta (A \cap B) = A \setminus (A \cap B) = A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = A \cap \overline{B} = A \setminus B$ .
11. Soit  $x \in E$ . Si  $x \notin A$ ,  $x$  n'est dans aucun des deux membres. Si  $x \in A : x \in A \cap (B \Delta C) \iff x \in B \Delta C \iff (x \text{ est dans exactement un des ensembles } B, C) \iff (x \text{ est dans exactement un des ensembles } A \cap B, A \cap C) \iff x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ .
12. Si  $x \in C : x$  appartient à  $A \cup C$  et à  $B \cup C$ , donc  $x \notin (A \cup C) \Delta (B \cup C)$ , et  $x \notin \overline{C}$ . Si  $x \notin C : x \in A \cup C \iff x \in A$  et  $x \in B \cup C \iff x \in B$ , donc  $x \in (A \cup C) \Delta (B \cup C) \iff x \in A \Delta B \iff x \in (A \Delta B) \cap \overline{C}$ .
13. Pour  $x \in E$ , notons  $N(x)$  le nombre d'ensembles parmi  $A, B, C$  contenant  $x$ . On a  $x \in X \Delta Y \iff x$  appartient à exactement un des deux. On vérifie que  $x \in (A \Delta B) \Delta C \iff N(x)$  est impair  $\iff x \in A \Delta (B \Delta C)$  (par exemple :  $x \in (A \Delta B) \Delta C$  ssi  $[x \in A \Delta B \text{ et } x \notin C]$  ou  $[x \notin A \Delta B \text{ et } x \in C]$ , c'est-à-dire  $N(x) = 1$  avec  $x \notin C$ , ou  $N(x) \in \{1; 3\}$  avec  $x \in C$ ; même analyse pour l'autre membre).
14.  $(x; y) \in C \times (A \cup B) \iff x \in C \text{ et } (y \in A \text{ ou } y \in B) \iff (x \in C \text{ et } y \in A) \text{ ou } (x \in C \text{ et } y \in B) \iff (x; y) \in (C \times A) \cup (C \times B)$ .
15.  $(x; y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \iff x \in A, y \in B, x \in C, y \in D \iff x \in A \cap C \text{ et } y \in B \cap D$ .

16.  $(x; y) \in (C \times A) \setminus (C \times B) \iff x \in C, y \in A \text{ et non}(x \in C \text{ et } y \in B) \iff x \in C, y \in A \text{ et } (x \notin C \text{ ou } y \notin B) \iff x \in C, y \in A, y \notin B \text{ (car } x \in C) \iff (x; y) \in C \times (A \setminus B)$ .
17. Pour  $(x; y) \in E^2 : (x; y) \notin A \times B \iff \overline{x \in A \text{ et } y \in B} \iff x \notin A \text{ ou } y \notin B \iff (x; y) \in (\overline{A} \times E) \cup (E \times \overline{B})$ .

### Exercice 9

- Pour  $k' = 1 : -\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{10}$ , donc  $\frac{\pi}{10} \in B$ .
- $\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} = \frac{3\pi}{10} \iff \frac{2k}{5} = \frac{1}{5} \iff k = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} : \frac{3\pi}{10} \notin A$ .
- Soit  $x \in A : x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} = -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} = -\frac{\pi}{10} + \frac{(2k+1)\pi}{5}$  avec  $k' = 2k + 1 \in \mathbb{Z} : x \in B$ . Donc  $A \subset B$ .  
Pour  $k' = 2 : -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} = \frac{3\pi}{10} \in B$ , et  $\frac{3\pi}{10} \notin A$  (question 2) :  $B \not\subset A$ .

### Exercice 10

- Pour  $x \neq 3 : \frac{2x+5}{x-3} = 2 + \frac{11}{x-3}$ , donc  $\frac{2x+5}{x-3} \in \mathbb{Z} \iff (x-3) \mid 11 \iff x-3 \in \{-11; -1; 1; 11\} \iff x \in \{-8; 2; 4; 14\}$ . Avec  $x \in \mathbb{N} : A = \{2; 4; 14\}$ . Pour  $x \neq 2 : \frac{4x+1}{x-2} = 4 + \frac{9}{x-2}$ . Il faut d'abord  $(x-2) \mid 9$ , soit  $x-2 \in \{-9; -3; -1; 1; 3; 9\}$ , d'où (avec  $x \in \mathbb{N}$ )  $x \in \{1; 3; 5; 11\}$ . Pour  $x = 1 : \frac{5}{-1} = -5 \notin \mathbb{N}$ ; pour  $x = 3, 5, 11 : 13, 7, 5 \in \mathbb{N}$ . Donc  $B = \{3; 5; 11\}$ .
- $A \Delta B = \{2; 3; 4; 5; 11; 14\}$  (ici  $A \cap B = \emptyset$ ).
- $C \cup A = \{2; 4; 5; 6; 14\}$ ,  $C \cup B = \{3; 4; 5; 6; 11\}$ , donc  $(C \cup A) \Delta (C \cup B) = \{2; 3; 11; 14\}$ , alors que  $C \cup (A \Delta B) = \{2; 3; 4; 5; 6; 11; 14\}$ . Les deux ensembles sont différents.

### Exercice 11

- 1) **a)**  $(0; 0) \in F$  car  $0 \leq 9$ , donc  $F \neq \emptyset$ ;  $2 \in G$  car  $|2 - 2| = 0 < \alpha$ , donc  $G \neq \emptyset$ . **1) b)** Soit  $(x; y) \in F$ . Alors  $x^2 \leq x^2 + 4y^2 \leq 9$ , donc  $|x| \leq 3$ ; et  $4y^2 \leq 9$ , donc  $|y| \leq \frac{3}{2} \leq 3$ . Ainsi  $x \in E$  et  $y \in E : (x; y) \in E^2$ . Donc  $F \subset E^2$ .
- 2)**  $G = ]2 - \alpha; 2 + \alpha[$  et  $H = ]-\frac{7}{2}; \frac{3}{2}[$ . **a)** Si  $G = H$ , les bornes coïncident :  $2 - \alpha = -\frac{7}{2}$  et  $2 + \alpha = \frac{3}{2}$ , soit  $\alpha = \frac{11}{2}$  et  $\alpha = -\frac{1}{2}$  : impossible. Aucune valeur de  $\alpha$  ne convient. **b)** Comme  $2 - \alpha < 2$  et  $\frac{3}{2} < 2$ , les deux intervalles sont disjoints si et seulement si  $2 - \alpha \geq \frac{3}{2}$ , soit  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ . Donc  $G \cap H = \emptyset \iff \alpha \in ]0; \frac{1}{2}]$ .

### Exercice 12

- $-2\pi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \leq 3\pi \iff -\frac{7}{3} \leq \frac{k}{2} \leq \frac{8}{3} \iff -\frac{14}{3} \leq k \leq \frac{16}{3} \iff k \in \{-4; -3; \dots; 5\} \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}$ . L'ensemble est  $\{-\frac{5\pi}{3}; -\frac{7\pi}{6}; -\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{3}; \frac{17\pi}{6}\}$ .
- Soit  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \in A$ . Alors  $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi = -\frac{\pi}{6} + \frac{2(3k+1)\pi}{3}$  avec  $3k + 1 \in \mathbb{Z} : x \in B$ .
- Par l'absurde : si  $x \in C \cap D$ , il existe  $k, k' \in \mathbb{Z}$  tels que  $\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + \frac{k'\pi}{3}$ . En multipliant par  $\frac{12}{\pi}$  :  $3 + 8k = -3 + 4k'$ , soit  $6 = 4k' - 8k$ , d'où  $3 = 2(k' - 2k) : 3$  serait pair, contradiction. Donc  $C \cap D = \emptyset$ .

### Exercice 13

Pour  $x \in \mathbb{N}$ ,  $2x - 1 \neq 0$  et  $4x^2 + 2x + 9 = (2x - 1)(2x + 2) + 11$ , donc  $\frac{4x^2+2x+9}{2x-1} = 2x + 2 + \frac{11}{2x-1} \in \mathbb{Z} \iff (2x - 1) \mid 11 \iff 2x - 1 \in \{-11; -1; 1; 11\} \iff x \in \{-5; 0; 1; 6\}$ . Donc  $A = \{0; 1; 6\}$ .

Pour  $x \neq 4 : \frac{x+8}{x-4} = 1 + \frac{12}{x-4}$ . Si  $x > 4$  : il faut  $(x - 4) \mid 12$ ,  $x - 4 \in \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$ . Si  $0 \leq x < 4$  :  $x - 4 \in \{-4; -3; -2; -1\}$  et  $1 + \frac{12}{x-4} \leq 1 - 3 < 0$  : exclu. Donc  $B = \{5; 6; 7; 8; 10; 16\}$ .

$A \cap B = \{6\}$ ;  $A \cup B = \{0; 1; 5; 6; 7; 8; 10; 16\}$ ;  $A \setminus B = \{0; 1\}$ .

### Exercice 14

- $(1; 1) \in F$  car  $1 \leq 2$  et  $1 < 2$ . Donc  $F \neq \emptyset$ .
- Soit  $(x; y) \in F$ . De  $y^2 < 2x$  on tire  $x > 0$ ; de  $x^2 \leq 2y$  on tire  $y \geq 0$ . Ensuite  $x^4 \leq 4y^2 < 8x$ , donc  $(x > 0) \implies x^3 < 8$  et  $x < 2$ . De même  $y^4 < 4x^2 \leq 8y$ ; si  $y > 0$ ,  $y^3 < 8$  et  $y < 2$ ; si  $y = 0$ ,  $y < 2$ . Ainsi  $0 \leq x \leq 2$  et  $0 \leq y \leq 2 : (x; y) \in [0; 2] \times [0; 2]$ .

### Exercice 15

1.  $(\Rightarrow)$  Soit  $X \in \mathcal{P}(E) : X \subset E \subset F$ , donc  $X \in \mathcal{P}(F)$ .  $(\Leftarrow)$   $E \in \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ , donc  $E \subset F$ .
2. Soit  $X \in \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) : X \subset E$  ou  $X \subset F$ , donc  $X \subset E \cup F$ , i.e.  $X \in \mathcal{P}(E \cup F)$ . Inclusion stricte : pour  $E = \{1\}$ ,  $F = \{2\}$ , on a  $\{1; 2\} \in \mathcal{P}(E \cup F)$  mais  $\{1; 2\} \notin \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ .

### Exercice 16

1.  $(x - 2y)(x + y) = x^2 + xy - 2xy - 2y^2 = x^2 - xy - 2y^2$ .
2.  $(x; y) \in F \iff x, y \in \mathbb{Z}$  et  $(x - 2y)(x + y) = 4$ . Posons  $u = x - 2y$ ,  $v = x + y$  (entiers,  $uv = 4$ ) ; alors  $v - u = 3y$ , donc  $u \equiv v$  modulo 3, puis  $y = \frac{v-u}{3}$ ,  $x = \frac{u+2v}{3}$ .

|          |          |           |          |            |            |            |
|----------|----------|-----------|----------|------------|------------|------------|
| $(u; v)$ | $(1; 4)$ | $(4; 1)$  | $(2; 2)$ | $(-1; -4)$ | $(-4; -1)$ | $(-2; -2)$ |
| $(x; y)$ | $(3; 1)$ | $(2; -1)$ | $(2; 0)$ | $(-3; -1)$ | $(-2; 1)$  | $(-2; 0)$  |

Toutes les paires conviennent ( $v - u \in \{3; -3; 0\}$ ), donc  $F = \{(3; 1); (2; -1); (2; 0); (-3; -1); (-2; 1); (-2; 0)\}$ .

3. Notons  $G$  l'ensemble paramétré.  $G \subset E$  : pour  $t \neq 0$ ,  $x - 2y = \frac{t^2+8-8+2t^2}{3t} = t$  et  $x + y = \frac{12}{3t} = \frac{4}{t}$ , donc  $(x - 2y)(x + y) = 4$ .  $E \subset G$  : si  $(x; y) \in E$ , posons  $t = x - 2y$ ;  $t(x + y) = 4$  donc  $t \neq 0$  et  $x + y = \frac{4}{t}$ . En résolvant :  $x = \frac{t+\frac{8}{t}}{3} = \frac{t^2+8}{3t}$  et  $y = \frac{\frac{4}{t}-t}{3} = \frac{4-t^2}{3t}$ . Donc  $(x; y) \in G$ , et  $E = G$ .

### Exercice 17

$X \subset X \cup A = Y \cap A \subset A$ , donc  $X \subset A$ . Et  $A \subset X \cup A = Y \cap A \subset Y$ , donc  $A \subset Y$ . Ainsi  $X \subset A \subset Y$ .

### Exercice 18

1) *Condition nécessaire* : si  $X \cup \bar{A} = B$ , alors  $\bar{A} \subset B$ . Si  $\bar{A} \not\subset B$  : pas de solution. Si  $\bar{A} \subset B$  :  $X \cup \bar{A} = B \iff (X \subset B \text{ et } B \setminus \bar{A} \subset X) \iff A \cap B \subset X \subset B$ . En effet  $(\Rightarrow)$   $X \subset B$  et tout  $x \in B \cap A$  n'est pas dans  $\bar{A}$ , donc est dans  $X$ ;  $(\Leftarrow)$   $X \cup \bar{A} \subset B$  et  $B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A}) \subset X \cup \bar{A}$ .  $S = \{X \in \mathcal{P}(E) / A \cap B \subset X \subset B\}$  si  $\bar{A} \subset B$ ;  $S = \emptyset$  sinon.

2) *Condition nécessaire* :  $B = X \cap \bar{A} \subset \bar{A}$ . Si  $B \not\subset \bar{A}$  :  $S = \emptyset$ . Si  $B \subset \bar{A}$  :  $X \cap \bar{A} = B \iff (B \subset X \text{ et } X \cap \bar{A} \subset B) \iff B \subset X \subset B \cup A$ .  $S = \{X \in \mathcal{P}(E) / B \subset X \subset A \cup B\}$  si  $B \cap A = \emptyset$ ;  $S = \emptyset$  sinon.

### Exercice 19

1)  $(\Rightarrow)$   $X \subset A \cup X = B$ ; et si  $x \in B \setminus A$ ,  $x \in A \cup X$  avec  $x \notin A$ , donc  $x \in X$ .  $(\Leftarrow)$   $A \cup X \subset A \cup B = B$  et  $B = A \cup (B \setminus A) \subset A \cup X$ .

2)  $(\Rightarrow)$  Si  $B \setminus X = A$  : soit  $x \in B \setminus A$ ; si  $x \notin X$ , alors  $x \in B \setminus X = A$ , absurde; donc  $x \in X$ . Soit  $x \in X$ ; si  $x \in A$ , alors  $x \in B \setminus X$  (car  $A \subset B$ ) donc  $x \notin X$ , absurde; donc  $X \subset \bar{A}$ .  $(\Leftarrow)$  Si  $B \setminus A \subset X \subset \bar{A}$  : tout  $x \in A$  est dans  $B$  et pas dans  $X$ , donc  $A \subset B \setminus X$ ; tout  $x \in B \setminus X$  n'est pas dans  $B \setminus A$  (sinon  $x \in X$ ), donc  $x \in A$ . D'où  $B \setminus X = A$ .

### Exercice 20

1) a)  $(X \setminus A) \cup (X \cap A) = (X \cap \bar{A}) \cup (X \cap A) = X \cap (\bar{A} \cup A) = X$ . 1) b)  $(X \cup A) \setminus (A \setminus X) = (X \cup A) \cap \overline{A \setminus X} = (X \cup A) \cap (\bar{A} \cup X) = X \cup (A \cap \bar{A}) = X$ .

2) Si  $X$  est solution :  $\bar{A} \subset X \cup \bar{A} = X \cap A \subset A$ , donc  $\bar{A} \subset A$ , ce qui impose  $\bar{A} = \emptyset$ , i.e.  $A = E$ . Si  $A \neq E$  :  $S = \emptyset$ . Si  $A = E$  : l'équation s'écrit  $X = X$ ;  $S = \mathcal{P}(E)$ .

3) D'après 1) a), une solution vérifie  $X = (X \setminus A) \cup (X \cap A) = C \cup B$ . Réciproquement,  $X = B \cup C$  convient :  $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A) = B \cup \emptyset = B$  et  $(B \cup C) \setminus A = (B \setminus A) \cup (C \setminus A) = \emptyset \cup C = C$ .  $S = \{B \cup C\}$ .

4)  $X \setminus A = B \setminus A \iff X \cup A = B \cup A$  ( $X \cup A$  est la réunion disjointe de  $A$  et  $X \setminus A$ )  $\iff X \cup A = B$  (car  $A \subset B$ )  $\iff B \setminus A \subset X \subset B$  (exercice 19.1).  $S = \{X / B \setminus A \subset X \subset B\}$ .

5) a) Si  $X$  est solution :  $X \cap A = B$  et  $X \setminus A = (A \cup X) \setminus A = C \setminus A$ , donc (1 a)  $X = (C \setminus A) \cup B$ . Réciproquement,  $X = B \cup (C \setminus A)$  vérifie  $A \cup X = A \cup (C \setminus A) = C$  (car  $B \subset A \subset C$ ) et  $A \cap X = B$ .  $S = \{B \cup (C \setminus A)\}$ . 5) b) Si

$X$  est solution :  $X \cap A = A \setminus (A \setminus X) = A \setminus B$  et  $X \setminus A = C \setminus A$ , donc  $X = (A \setminus B) \cup (C \setminus A)$ . Réciproquement ce  $X$  vérifie  $A \setminus X = A \setminus (A \setminus B) = B$  (car  $B \subset A$ ) et  $X \cup A = A \cup (C \setminus A) = C$ .  $S = \{(A \setminus B) \cup (C \setminus A)\}$ .