

Corrigé détaillé de la série — Chapitre 01

Notions de logique

1^{ère} Bac Sciences Mathématiques · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — règles de rédaction utilisées

- La négation de P est notée $\overline{P}$; $\overline{(\forall x \in E) P(x)}$ est $(\exists x \in E) \overline{P(x)}$ et $\overline{(\exists x \in E) P(x)}$ est $(\forall x \in E) \overline{P(x)}$ (l'ensemble E ne change pas).
- On écrit $A \iff B$ **seulement** si chaque étape est réversible (et on le justifie : multiplication par un réel non nul, carrés de deux réels positifs, inverses de deux réels de même signe strict...). Sinon on écrit $A \implies B$ et on vérifie la réciproque ou les solutions obtenues.
- V = vrai, F = faux.

Exercice 1

- $P : (\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) \quad m - n = 4$ (vraie : $m = n + 4$).
- $Q : (\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x \geq m$ (fausse : pour tout m , $x = m - 1$ ne convient pas).
- $R : (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad n^2 = 3$ (fausse).
- $S : (\forall x \in \mathbb{Q}) \quad x^2 \neq 3$, c'est-à-dire $\overline{(\exists x \in \mathbb{Q}) \quad x^2 = 3}$.
- $T : (\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) \quad x < y \implies (\exists d \in \mathbb{D}) \quad x < d < y$.

Exercice 2

- P_1 . $\overline{P_1} : (\exists x \in \mathbb{R}) \quad \sqrt{(x-1)^2} \neq x - 1$. Pour $x = 0 : \sqrt{1} = 1 \neq -1$. Donc $\overline{P_1}$ est vraie et P_1 **est fausse** (en fait $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$).
- P_2 . $\overline{P_2} : (\exists x \in \mathbb{R}_+) \quad x^2 - 2x - 3 > 0$. Pour $x = 4 \in \mathbb{R}_+ : 16 - 8 - 3 = 5 > 0$. P_2 **est fausse**.
- P_3 . $\overline{P_3} : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad y \leq x + 1$. Soit $x \in \mathbb{R} ; y = x + 1$ convient. Donc $\overline{P_3}$ est vraie, P_3 **est fausse**.
- P_4 . $\overline{P_4} : (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad y \leq x + 1$. Soit $x \in \mathbb{R} ; y = x + 2$ vérifie $y > x + 1$. P_4 **est vraie**. (P_3 et P_4 ne diffèrent que par l'ordre des quantificateurs.)
- P_5 . $\overline{P_5} : (\exists x \in \mathbb{R}^*)(\exists y \in \mathbb{R}^*) \quad x^2 + y^2 = 2$. Pour $x = y = 1 : 1 + 1 = 2$. P_5 **est fausse**.
- P_6 . $\overline{P_6} : (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) \quad y = \cos(x)$. Pour $y = 3 : \text{pour tout } x, \cos(x) \leq 1 < 3$, donc $\cos(x) \neq 3$. P_6 **est vraie**.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
Valeur	F	F	F	V	F	V

Exercice 3

- $\overline{P} : \ll \text{Au moins un élève de la classe n'a pas rendu son devoir.} \gg$
- $Q : (\exists x \in \mathbb{R}) \quad x < 0$; $\overline{Q} : \ll \text{Aucun réel n'est négatif} \gg$, c'est-à-dire $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x \geq 0$.
- $R : (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (4 \mid n \implies 8 \mid n)$; $\overline{R} : (\exists n \in \mathbb{N}) \quad (4 \mid n \text{ et } 8 \nmid n) : \ll \text{Il existe un entier naturel divisible par 4 et non divisible par 8} \gg$ (vraie : $n = 4$).

Exercice 4

- $\overline{P} : (\exists x \in \mathbb{R}) \quad (x \neq 1 \text{ et } x \leq 20)$.
- $\overline{Q} : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad (x^2 \geq 30 \text{ ou } x \notin \mathbb{N})$.
- Avec $A \iff B \iff [(A \text{ et } \overline{B}) \text{ ou } (\overline{A} \text{ et } B)] :$

$$\overline{R} : (\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \left[(x > y + 2 \text{ et } (x - y)^2 < x^2 + y^2) \text{ ou } (x \leq y + 2 \text{ et } (x - y)^2 \geq x^2 + y^2) \right].$$

- Avec $\overline{A \implies B} \iff (A \text{ et } \overline{B}) : \overline{S} : \ll a < b \text{ et } a < c \gg$.

Exercice 5

On note L et M les deux membres ; on montre que les colonnes L et M coïncident (donc $L \iff M$ est toujours vraie), ou que la dernière colonne ne contient que des V.

1) et 2) Lois de Morgan.

P	Q	$\overline{P \text{ et } Q}$	$\overline{P} \text{ ou } \overline{Q}$	$\overline{P \text{ ou } Q}$	$\overline{P} \text{ et } \overline{Q}$
V	V	F	F	F	F
V	F	V	V	F	F
F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Les colonnes 3 et 4 sont identiques, ainsi que les colonnes 5 et 6 : 1) et 2) sont des lois logiques.

3) et 4) et 5).

P	Q	$\overline{P \Rightarrow Q}$	$P \text{ et } \overline{Q}$	$P \Leftrightarrow Q$	$\overline{P \Leftrightarrow Q}$	$\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q}$	$\overline{P} \Leftrightarrow Q$
V	V	F	F	V	V	F	F
V	F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V	V
F	F	F	F	V	V	F	F

Les colonnes (3 ; 4), (5 ; 6) et (7 ; 8) sont deux à deux identiques : 3), 4) et 5) sont des lois logiques.

6) Notons T : « $(P \Rightarrow Q)$ et $\overline{Q}$ ».

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\overline{Q}$	T	$\overline{P}$	$T \Rightarrow \overline{P}$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

7) L : « $(P \Rightarrow Q)$ et $(P \Rightarrow R)$ », M : « $P \Rightarrow (Q \text{ et } R)$ ».

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$P \Rightarrow R$	L	$Q \text{ et } R$	M
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	F	V

Les colonnes L et M sont identiques : 7) est une loi logique.

Exercice 6

- $\overline{R_1}$: $a \leq b$ et $a \leq c$.
- R_2 signifie « $a = b$ et $b = c$ », donc $\overline{R_2}$: $a \neq b$ ou $b \neq c$.
- R_3 signifie « $a < b$ et $b \leq c$ », donc $\overline{R_3}$: $a \geq b$ ou $b > c$.
- $\overline{R_4}$: $(\exists(x; y) \in \mathbb{R}^2) \quad 0 \leq x - y \leq 3 \quad \text{et} \quad |x - y| > 3$.
- $\overline{R_5}$: $(\exists x \in \mathbb{R}^*)(\exists y \in \mathbb{R}^*) \quad (x + y = 2 \text{ et } y \geq 1) \text{ ou } (x + y \neq 2 \text{ et } y < 1)$.
- $\overline{R_6}$: $(\exists x \in \mathbb{R}) \quad x < 1 \text{ et } x > 1$ (qui est fausse : R_6 est vraie).
- $\overline{R_7}$: $(\exists(a; b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \cos(x) \neq \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ ou } \sin(x) \neq \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Exercice 7

Pour montrer qu'une proposition « pour tout... » est fausse, il suffit d'un contre-exemple.

1. **Fausse** : 3 est premier impair et $3 = 4k + 1 \iff k = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.
2. **Fausse** : 27 se termine par 7 et $27 = 3 \times 9$.
3. **Fausse** : pour $n = 17$: $17^2 - 17 + 17 = 289 = 17^2$ n'est pas premier.
4. **Fausse** : pour $(x; y) = (0; 0)$: $0 \neq 5$.
5. **Fausse** : pour $(x; y) = (0; 1)$: $|0 - 1| = 1$ et $|0| - |1| = -1$.
6. **Fausse** : pour $x = y = 0$: $\cos 0 = 1$ et $\cos 0 - \cos 0 = 0$.
7. **Fausse** : pour $x = \frac{\pi}{2}$, $y = -\frac{\pi}{2}$: $\sin(\pi) = 0$ et $\sin \frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2}) = 1 + 1 = 2$.
8. **Fausse**. Sa négation est $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) x^2 + 2xy + 2y^2 \neq 0$. Pour $x = 1$: $2y^2 + 2y + 1 = 0$ a pour discriminant $4 - 8 = -4 < 0$, donc aucun réel y ne convient : la négation est vraie.

Exercice 8

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leq 1$. Alors $-1 \leq x \leq 1$, donc $-2 \leq 2x \leq 2$, donc $-5 \leq 2x - 3 \leq -1$. Ainsi $-5 \leq 2x - 3 \leq 5$, c'est-à-dire $|2x - 3| \leq 5$.
2. Soit $x > 0$. $x + \frac{4}{x} - 4 = \frac{x^2 - 4x + 4}{x} = \frac{(x - 2)^2}{x} \geq 0$ car $(x - 2)^2 \geq 0$ et $x > 0$. Donc $x + \frac{4}{x} \geq 4$.
3. Soit $x > 2$. $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$ avec $x - 2 > 0$ et $x + 1 > 3 > 0$, donc $x^2 - x - 2 > 0$.
4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $xy + 2 = 2x + y$. Alors $xy - 2x - y + 2 = 0$, soit $x(y - 2) - (y - 2) = 0$, c'est-à-dire $(x - 1)(y - 2) = 0$. Donc $x - 1 = 0$ ou $y - 2 = 0$: $x = 1$ ou $y = 2$.
5. Soient $a, b \in \mathbb{Q}$: $a = \frac{p}{q}$ et $b = \frac{r}{s}$ avec $p, r \in \mathbb{Z}$, $q, s \in \mathbb{N}^*$. Alors $ab = \frac{pr}{qs}$ avec $pr \in \mathbb{Z}$ et $qs \in \mathbb{N}^*$, donc $ab \in \mathbb{Q}$.
6. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $ac < 0$. Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$; or $b^2 \geq 0$ et $-4ac > 0$, donc $\Delta > 0$: l'équation admet deux solutions réelles distinctes.

Exercice 9

Pour chaque implication, on démontre la **contraposée** $\overline{Q} \implies \overline{P}$.

1. Contraposée : $(x + 2)(y - 2) = (x - 2)(y + 2) \implies x = y$. On a $(x + 2)(y - 2) - (x - 2)(y + 2) = (xy - 2x + 2y - 4) - (xy + 2x - 2y - 4) = 4(y - x)$. Si les deux produits sont égaux, $4(y - x) = 0$, donc $x = y$.
2. Contraposée : $\sqrt{1 + 2x} = 1 + x \implies x = 0$ (pour $x \geq 0$). Si $\sqrt{1 + 2x} = 1 + x$, en élevant au carré : $1 + 2x = 1 + 2x + x^2$, donc $x^2 = 0$, d'où $x = 0$.
3. Contraposée : $\frac{x - 1}{x + 1} = \frac{y - 1}{y + 1} \implies x = y$ (avec $x + 1 > 0$, $y + 1 > 0$). Si l'égalité a lieu : $(x - 1)(y + 1) = (y - 1)(x + 1)$, soit $xy + x - y - 1 = xy + y - x - 1$, donc $2x = 2y$ et $x = y$.
4. Contraposée : $\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{y}{y^2 + 1} \implies (x = y \text{ ou } xy = 1)$. Si l'égalité a lieu (dénominateurs > 0) : $x(y^2 + 1) = y(x^2 + 1)$, soit $xy^2 - x^2y + x - y = 0$, c'est-à-dire $-xy(x - y) + (x - y) = 0$, d'où $(x - y)(1 - xy) = 0$: $x = y$ ou $xy = 1$.
5. Contraposée : $x \geq 2 \implies x^2 - 3x + 2 \geq 0$. Si $x \geq 2$: $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ avec $x - 1 \geq 1 > 0$ et $x - 2 \geq 0$, donc le produit est positif.
6. Contraposée : n pair $\implies n^3$ pair. Si $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$), alors $n^3 = 8k^3 = 2(4k^3)$ est pair.
7. Contraposée : $x^2 + 4x = y^2 + 4y \implies (x = y \text{ ou } x + y = -4)$. Si $x^2 + 4x = y^2 + 4y$: $(x^2 - y^2) + 4(x - y) = 0$, soit $(x - y)(x + y + 4) = 0$, donc $x = y$ ou $x + y = -4$.
8. Contraposée : $(x > z \text{ et } y > z) \implies x + 2y > 3z$. Si $x > z$ et $y > z$, alors $2y > 2z$ et, en additionnant, $x + 2y > 3z$.

Exercice 10

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Les deux membres $\sqrt{x + 5}$ et $1 + \sqrt{x}$ sont positifs, donc $\sqrt{x + 5} = 1 + \sqrt{x} \iff x + 5 = 1 + 2\sqrt{x} + x \iff 2\sqrt{x} = 4 \iff \sqrt{x} = 2 \iff x = 4$ (la dernière équivalence car $\sqrt{x} \geq 0$ et $2 \geq 0$).
2. Soit $x \geq 2$ (donc $x > 0$). $\frac{\sqrt{x - 2}}{x} \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \iff 4\sqrt{x - 2} \leq \sqrt{2}x$ (multiplication par $4x > 0$). Les deux membres

étant positifs : $\iff 16(x-2) \leq 2x^2 \iff 2x^2 - 16x + 32 \geq 0 \iff 2(x-4)^2 \geq 0$, ce qui est vrai. Donc l'inégalité est vraie pour tout $x \geq 2$.

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Les deux membres étant positifs : $|x-y| = |x| + |y| \iff (x-y)^2 = (|x| + |y|)^2 \iff x^2 - 2xy + y^2 = x^2 + 2|xy| + y^2 \iff -xy = |xy| \iff xy \leq 0$ (car $|u| = -u \iff u \leq 0$).

4. Soit $x \in [-3; 3]$. On a $x + 3\sqrt{2} \geq -3 + 3\sqrt{2} > 0$ (car $\sqrt{2} > 1$) et $\sqrt{9-x^2} \geq 0$. Donc $\sqrt{9-x^2} \leq x + 3\sqrt{2} \iff 9-x^2 \leq x^2 + 6\sqrt{2}x + 18 \iff 0 \leq 2x^2 + 6\sqrt{2}x + 9 \iff 0 \leq (\sqrt{2}x + 3)^2$, ce qui est vrai.

Exercice 11

1) Cas $x \geq 2$: $|x-2| = x-2$ et l'équation devient $-x^2 + x + 2 = 0 \iff (x-2)(x+1) = 0 \iff x \in \{2; -1\}$; seul 2 vérifie $x \geq 2$. Cas $x < 2$: $|x-2| = 2-x$ et l'équation devient $-x^2 - x + 6 = 0 \iff (x-2)(x+3) = 0 \iff x \in \{2; -3\}$; seul -3 vérifie $x < 2$. Donc $S = \{-3; 2\}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Cas $x \geq 0$: $\sqrt{x^2+4} \geq 2 > 0$ et $x \geq 0$, donc la somme est > 0 . Cas $x < 0$: $x^2 + 4 > x^2$ donc $\sqrt{x^2+4} > \sqrt{x^2} = |x| = -x$, d'où $\sqrt{x^2+4} + x > 0$.

3) Cas n pair : $n = 2k$, $n(5n+3) = 2k(10k+3)$ est pair. Cas n impair : $n = 2k+1$, $5n+3 = 10k+8 = 2(5k+4)$, donc $n(5n+3) = 2(2k+1)(5k+4)$ est pair.

4) Domaine : $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \geq 0 \iff x \in D =]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$. Cas $x \in D$ et $x < -1$: $x+1 < 0 \leq \sqrt{x^2-3x+2}$: tout $x < -1$ est solution. Cas $x \in D$ et $x \geq -1$: les deux membres sont positifs, donc $\sqrt{x^2-3x+2} > x+1 \iff x^2-3x+2 > x^2+2x+1 \iff x < \frac{1}{5}$. Avec $x \geq -1$ et $x \in D$: $x \in [-1; \frac{1}{5}[$.
Donc $S =]-\infty; -1[\cup [-1; \frac{1}{5}[=]-\infty; \frac{1}{5}[$.

5) $m \neq 0$: équation du second degré, de discriminant réduit $\Delta' = (m-1)^2 - m(m-3) = m+1$.

— Si $m < -1$: $\Delta' < 0$, $S = \emptyset$.

— Si $m = -1$: $\Delta' = 0$, une solution double $x = \frac{m-1}{m} = 2$; $S = \{2\}$.

— Si $m > -1$ et $m \neq 0$: $\Delta' > 0$, $S = \left\{ \frac{m-1-\sqrt{m+1}}{m}; \frac{m-1+\sqrt{m+1}}{m} \right\}$.

6) Tout entier n s'écrit $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$ ($k \in \mathbb{N}$). $n = 3k$: $n(n^2+2) = 3k(n^2+2)$. $n = 3k+1$: $n^2+2 = 9k^2+6k+3 = 3(3k^2+2k+1)$. $n = 3k+2$: $n^2+2 = 9k^2+12k+6 = 3(3k^2+4k+2)$. Dans tous les cas, $3 \mid n(n^2+2)$.

Exercice 12

1. Supposons ABC rectangle. L'hypoténuse est le plus grand côté $[CA]$, donc $CA^2 = AB^2 + BC^2$: $64a^2 = 25a^2 + 36a^2 = 61a^2$, d'où $3a^2 = 0$ et $a = 0$, ce qui contredit $a > 0$. Donc ABC n'est pas rectangle.

2. Supposons $a > 2$ et $b > 2$. Comme $a, b > 0$, on obtient $ab > 2 \times 2 = 4$, ce qui contredit $ab = 4$. Donc $a \leq 2$ ou $b \leq 2$.

3. Supposons $b \neq 0$. Alors $\sqrt{2} = -\frac{2a}{3b} \in \mathbb{Q}$ (quotient de rationnels, $3b \neq 0$), ce qui contredit $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Donc $b = 0$, puis $2a = 0$, soit $a = 0$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$, $\text{PGCD}(a; b) = 1$. Alors $(n+1)b^2 = (n+2)a^2$. Comme $\text{PGCD}(a^2; b^2) = 1$ et $a^2 \mid (n+1)b^2$, on a $a^2 \mid n+1$; de même $b^2 \mid n+2$. Écrivons $n+1 = pa^2$; en reportant, $pa^2b^2 = (n+2)a^2$, donc $n+2 = pb^2$. Ainsi p divise $n+1$ et $n+2$, donc $p \mid \text{PGCD}(n+1; n+2) = 1$ et $p = 1$: $n+1 = a^2$ et $n+2 = b^2$. Alors $b^2 - a^2 = 1$, soit $(b-a)(b+a) = 1$ avec $b+a \geq 2$: contradiction. Donc $\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 13

Dans chaque cas : **initialisation**, puis **hérédité** (on suppose la propriété vraie au rang n et on la démontre au rang $n+1$), puis **conclusion** par le principe de récurrence.

1) $n = 1$: $1 = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{3}$. Hérédité : $\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + (2n+1)^2 = \frac{(2n+1)(2n^2-n+6n+3)}{3} =$

$$\frac{(2n+1)(2n^2+5n+3)}{3} = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \text{ qui est la formule au rang } n+1.$$

$$2) n=0 : 1 = \frac{5-1}{4}. \text{ Hérédité : } \sum_{k=0}^{n+1} 5^k = \frac{5^{n+1}-1}{4} + 5^{n+1} = \frac{5 \cdot 5^{n+1}-1}{4} = \frac{5^{n+2}-1}{4}.$$

$$3) n=1 : 1 = 1 \cdot (2-1). \text{ Hérédité : } n^2(2n^2-1) + (2n+1)^3 = 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1 \text{ et } (n+1)^2(2(n+1)^2-1) = (n^2+2n+1)(2n^2+4n+1) = 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1. \text{ Égalité.}$$

$$4) n=0 : 1 = 1 \times 1. \text{ Hérédité : } (n+1)(2n+1) + (4n+5) = 2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3), \text{ formule au rang } n+1.$$

$$5) n=0 : 1 > 0. \text{ Hérédité : si } 3^n > 2n, \text{ alors } 3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 6n \geq 2n+2 \text{ dès que } n \geq \frac{1}{2}, \text{ i.e. } n \geq 1; \text{ pour } n=0 : 3^1 = 3 > 2. \text{ Donc } 3^{n+1} > 2(n+1).$$

$$6) n=1 : 4 \geq 4. \text{ Hérédité : si } 4^n \geq 3n+1, \text{ alors } 4^{n+1} \geq 12n+4 = 3(n+1) + 1 + 9n \geq 3(n+1) + 1.$$

$$7) n=1 : \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \text{ Hérédité :}$$

$$\frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

Sans récurrence : pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$, donc la somme est télescopique :

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}.$$

$$8) n=0 : 1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}. \text{ Hérédité : } \frac{2}{3} + \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^n} + \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} = \frac{2}{3} + \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^n} - \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} = \frac{2}{3} + \frac{(-1)^n(2-3)}{3 \cdot 2^{n+1}} = \frac{2}{3} + \frac{(-1)^{n+1}}{3 \cdot 2^{n+1}}.$$

$$9) n=1 : 3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 9}{6}. \text{ Hérédité :}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+7)}{6} + (n+1)(n+3) = \frac{(n+1)(2n^2+13n+18)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+9)}{6},$$

formule au rang $n+1$.

$$10) n=0 : 1 \geq 1. \text{ Hérédité : si } \left(\frac{4}{3} \right)^n \geq 1 + \frac{n}{3}, \text{ alors } \left(\frac{4}{3} \right)^{n+1} \geq \frac{4}{3} \left(1 + \frac{n}{3} \right) = 1 + \frac{n+1}{3} + \frac{4n}{9} \geq 1 + \frac{n+1}{3}.$$

$$11) n=0 : 7^0 - 1 = 0 = 6 \times 0. \text{ Hérédité : si } 7^n - 1 = 6q \text{ (} q \in \mathbb{N} \text{), alors } 7^{n+1} - 1 = 7(7^n - 1) + 6 = 6(7q + 1).$$

Exercice 14

- Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $P(n) = 0$. Alors $n(n^2 + n + 1) = -3$, donc n divise 3 : $n \in \{-3; -1; 1; 3\}$. Or $P(1) = 6$, $P(-1) = 2$, $P(3) = 42$, $P(-3) = -18$: aucune n'est nulle. Contradiction : P n'a pas de racine entière.
- Contraposée : $\sqrt{4+x^2} = 2 + \frac{x^2}{4} \implies x = 0$. En élevant au carré : $4 + x^2 = 4 + x^2 + \frac{x^4}{16}$, donc $x^4 = 0$ et $x = 0$.
- Par l'absurde : si $x \leq \frac{1}{2}$, $y \leq \frac{1}{2}$ et $z \leq \frac{1}{2}$, alors $x + y + z \leq \frac{3}{2}$, ce qui contredit l'hypothèse.
- Posons $u = \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}$ et $v = \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}$; on a $u^2 - v^2 = 4\sqrt{\frac{x}{y}}\sqrt{\frac{y}{x}} = 4$. Contraposée : si $u = 2\sqrt{2}$, alors $v^2 = u^2 - 4 = 4$, donc $|v| = 2$.
- Supposons $r = \sqrt{3} + \sqrt{5} \in \mathbb{Q}$. Alors $r^2 = 8 + 2\sqrt{15}$, donc $\sqrt{15} = \frac{r^2 - 8}{2} \in \mathbb{Q}$: contradiction. Donc $\sqrt{3} + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 15

- Contre-exemple : $x = -1 \in \mathbb{R}^*$ donne $-1 - 4 = -5 < 4$.
- a) Les deux quotients sont positifs, donc (carrés de réels positifs, puis multiplication par $(a^2+4)(b^2+4) > 0$) : $\frac{a}{\sqrt{a^2+4}} < \frac{b}{\sqrt{b^2+4}} \iff \frac{a^2}{a^2+4} < \frac{b^2}{b^2+4} \iff a^2(b^2+4) < b^2(a^2+4) \iff 4a^2 < 4b^2 \iff a < b$ (car $a, b \geq 0$).
- b) Les deux membres sont positifs : $a\sqrt{a^2+4} = b\sqrt{b^2+4} \iff a^2(a^2+4) = b^2(b^2+4) \iff (a^2-b^2)(a^2+b^2+4) = 0 \iff a^2 = b^2$ (car $a^2+b^2+4 > 0$) $\iff a = b$ (car $a, b \geq 0$).
- On a $x^2 + 3xy + 2y^2 = (x+y)(x+2y)$. Contraposée : si $|x+y| > 2$ et $|x+2y| > 2$, alors $|x^2 + 3xy + 2y^2| = |x+y| \cdot |x+2y| > 4$.

4) a) La division euclidienne de n par 3 donne $n = 3k + r$ avec $r \in \{0; 1; 2\}$; si $3 \nmid n$, $r \neq 0$, donc $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$.

4) b) Contraposée : si $3 \nmid n$, alors $3 \mid n^2 - 1$. Si $n = 3k + 1$: $n^2 - 1 = 9k^2 + 6k = 3(3k^2 + 2k)$; si $n = 3k + 2$: $n^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 = 3(3k^2 + 4k + 1)$.

5) Pour $n \geq 1$: $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < n^2 + 4n$ (car $2n > 1$) et $n^2 + 4n < n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$. Si $\sqrt{n^2 + 4n} = m \in \mathbb{N}$, alors $n+1 < m < n+2$: impossible. Donc $\sqrt{n^2 + 4n} \notin \mathbb{N}$. Supposons $\sqrt{\frac{n}{n+4}} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $\frac{a}{b}$ irréductible, $a, b \in \mathbb{N}^*$. Alors $\sqrt{n^2 + 4n} = (n+4)\frac{a}{b}$ est rationnel; écrivons-le $\frac{p}{q}$ irréductible ($p, q \in \mathbb{N}^*$). Alors $n^2 + 4n = \frac{p^2}{q^2}$ et $\frac{p^2}{q^2}$ est irréductible (admis); comme c'est un entier, $q^2 = 1$, donc $\sqrt{n^2 + 4n} = p \in \mathbb{N}$: contradiction avec ce qui précède.

Exercice 16

1) Posons $u_n = 3^{2n+2} + 2^{6n+1}$. $u_0 = 9 + 2 = 11$. Si $u_n = 11q$: $u_{n+1} = 9 \cdot 3^{2n+2} + 64 \cdot 2^{6n+1} = 9u_n + 55 \cdot 2^{6n+1} = 11(9q + 5 \cdot 2^{6n+1})$. Par récurrence, $11 \mid u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) a) Contraposée : $5 \nmid n \implies 5 \nmid n^2$. Si $5 \nmid n$, $n = 5k + r$ avec $r \in \{1; 2; 3; 4\}$ et $n^2 = 5(5k^2 + 2kr) + r^2$, avec $r^2 \in \{1; 4; 9; 16\}$, soit $r^2 = 5q' + s$ avec $s \in \{1; 4; 4; 1\}$. Le reste de n^2 par 5 vaut 1 ou 4 : $5 \nmid n^2$.

2) b) Supposons $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$, PGCD($a; b$) = 1. Alors $a^2 = 5b^2$, donc $5 \mid a^2$, donc $5 \mid a$: $a = 5c$. Alors $25c^2 = 5b^2$, $b^2 = 5c^2$, donc $5 \mid b$. Contradiction avec PGCD($a; b$) = 1.

3) $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq a^2 + b^2 + (a^2 + b^2) = 4$ car $2ab \leq a^2 + b^2 \iff (a-b)^2 \geq 0$. Donc $|a+b| = \sqrt{(a+b)^2} \leq 2$.

4) a) $a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2] \geq 0$.

4) b) ($\iff$) évident. ($\implies$) $a^3 + 2a = b^3 + 2b \implies (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 2) = 0$. Or $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$, donc $a^2 + ab + b^2 + 2 > 0$, d'où $a - b = 0$.

5) Supposons $a > b$ et posons $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. L'hypothèse donne $a \leq b + \frac{a-b}{2}$, soit $\frac{a-b}{2} \leq 0$, donc $a \leq b$: contradiction. Donc $a \leq b$.

Exercice 17

En utilisant $(A \Rightarrow B) \iff (\bar{A} \text{ ou } B)$, les lois de Morgan et la distributivité :

$$\begin{aligned} [(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R] &\iff [\overline{P \text{ ou } Q} \text{ ou } R] \iff [(\bar{P} \text{ et } \bar{Q}) \text{ ou } R] \\ &\iff [(\bar{P} \text{ ou } R) \text{ et } (\bar{Q} \text{ ou } R)] \iff [(P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)]. \end{aligned}$$

Chaque étape est une loi logique, donc l'équivalence est vraie quelles que soient les valeurs de P, Q, R : c'est une loi logique.

Exercice 18

1) $n = 1$: $6 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4}$. Hérédité : $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$.

2) $u_n = 2^{5n+3} + 17 \cdot 7^n$. $u_1 = 256 + 119 = 375 = 25 \times 15$. Si $u_n = 25q$: $u_{n+1} = 32 \cdot 2^{5n+3} + 7 \cdot 17 \cdot 7^n = 7u_n + 25 \cdot 2^{5n+3} = 25(7q + 2^{5n+3})$.

3) $u_n = 2 \cdot 3^{2n} + 2^{6n-4}$. $u_1 = 18 + 4 = 22$. Si $u_n = 11q$: $u_{n+1} = 9 \cdot 2 \cdot 3^{2n} + 64 \cdot 2^{6n-4} = 9u_n + 55 \cdot 2^{6n-4} = 11(9q + 5 \cdot 2^{6n-4})$.

4) $u_n = 3^{3n+1} + 2^{3n+4}$. $u_1 = 81 + 128 = 209 = 19 \times 11$. Si $u_n = 19q$: $u_{n+1} = 27 \cdot 3^{3n+1} + 8 \cdot 2^{3n+4} = 8u_n + 19 \cdot 3^{3n+1} = 19(8q + 3^{3n+1})$.

5) $n = 1$: $2 \leq 4 - 2$. Hérédité : supposons $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \leq \frac{4n}{n+1}$. Alors $\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \leq \frac{4n}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^2 + 1}{(n+1)^2} = \frac{4n(n^2 + 2n + 2)}{(n+1)^3}$. Or $\frac{4(n+1)}{n+2} - \frac{4n(n^2 + 2n + 2)}{(n+1)^3} = \frac{4[(n+1)^4 - n(n+2)(n^2 + 2n + 2)]}{(n+1)^3(n+2)} = \frac{4}{(n+1)^3(n+2)} > 0$.
Donc le produit est $\leq \frac{4(n+1)}{n+2} = 4 - \frac{4}{n+2}$.

6) Notons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$. $n = 1 : 2\sqrt{2} - 2 \approx 0,83 \leq 1 \leq 1$. Hérédité (majoration) : $S_{n+1} \leq 2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ et $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \geq \frac{2}{2\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, donc $S_{n+1} \leq 2\sqrt{n+1} - 1$. Hérédité (minoration) : $S_{n+1} \geq 2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ et $2\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{2\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, donc $S_{n+1} \geq 2\sqrt{n+2} - 2$.

7) $n = 1 : \frac{1}{6} = \frac{4}{4 \cdot 2 \cdot 3}$. Hérédité :

$$\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n(n+3)^2 + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)^2(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)},$$

car $n^3 + 6n^2 + 9n + 4 = (n+1)^2(n+4)$.

8) $n = 1 : -1 = \frac{-1 \cdot 2}{2}$. Hérédité : $\frac{(-1)^n n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2 = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)(2(n+1) - n)}{2} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)(n+2)}{2}$.

9) $n = 1 : 0 = 0$. Hérédité : $\frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{12} + n(n+1)^2 = \frac{n(n+1)[(n-1)(3n+2) + 12(n+1)]}{12} = \frac{n(n+1)(3n^2 + 11n + 10)}{12} = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$, formule au rang $n+1$.

Exercice 19

1. $n = 1 : (a_1; b_1) = (1; 1)$. Si $(1 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{N}$, alors $(1 + \sqrt{3})^{n+1} = (a_n + b_n\sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) = (a_n + 3b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{3}$, avec $a_n + 3b_n \in \mathbb{N}$ et $a_n + b_n \in \mathbb{N}$.
2. On peut choisir $a_{n+1} = a_n + 3b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$ (ces nombres sont d'ailleurs uniques car $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$).
3. $(a_2; b_2) = (4; 2)$, $(a_3; b_3) = (10; 6)$, $(a_4; b_4) = (28; 16)$, $(a_5; b_5) = (76; 44) : (1 + \sqrt{3})^5 = 76 + 44\sqrt{3}$.

Exercice 20

1. Récurrence. $n = 1 : a - b = (a - b) \cdot 1$. Si la formule est vraie au rang $n : a^{n+1} - b^{n+1} = a(a^n - b^n) + b^n(a - b) = (a - b) \left[\sum_{k=1}^n a^{n+1-k} b^{k-1} + b^n \right] = (a - b) \sum_{k=1}^{n+1} a^{n+1-k} b^{k-1}$.
2. $x^{n+2} + y^{n+2} - x^n y^2 - x^2 y^n = x^n(x^2 - y^2) - y^n(x^2 - y^2) = (x^n - y^n)(x^2 - y^2)$. Pour $n \geq 1$, d'après 1), $x^n - y^n = (x - y)S$ avec $S > 0$ (somme de termes strictement positifs), et $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. Donc la différence vaut $(x - y)^2(x + y)S \geq 0$. Pour $n = 0$: la différence est nulle.

Exercice 21

- 1) $n = 1 : x + y \geq x + y$. Hérédité : si $2^{n-1}(x^n + y^n) \geq (x + y)^n$, alors $(x + y)^{n+1} \leq 2^{n-1}(x^n + y^n)(x + y)$ et $2(x^{n+1} + y^{n+1}) - (x^n + y^n)(x + y) = x^{n+1} + y^{n+1} - x^n y - x y^n = (x^n - y^n)(x - y) \geq 0$ (même signe, exercice 20). D'où $(x + y)^{n+1} \leq 2^n(x^{n+1} + y^{n+1})$.
- 2) a) $1 - xy = \frac{(x+y)^2}{4} - xy = \frac{(x-y)^2}{4} \geq 0$, donc $xy \leq 1$. D'après 1) : $x^n + y^n \geq \frac{(x+y)^n}{2^{n-1}} = \frac{2^n}{2^{n-1}} = 2$.
- 2) b) $\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)\left(1 + \frac{1}{y^n}\right) = 1 + \frac{x^n + y^n}{(xy)^n} + \frac{1}{(xy)^n}$. Comme $0 < xy \leq 1$, $0 < (xy)^n \leq 1$, donc $\frac{1}{(xy)^n} \geq 1$ et $\frac{x^n + y^n}{(xy)^n} \geq x^n + y^n \geq 2$. Le produit est donc $\geq 1 + 2 + 1 = 4$.

Exercice 22

- 1) $n^2 < n^2 + 2n < (n+1)^2$ pour $n \geq 1$, donc $n(n+2)$ n'est pas un carré parfait. Si $\sqrt{\frac{n+2}{n}} \in \mathbb{Q}$, alors $\sqrt{n(n+2)} = n\sqrt{\frac{n+2}{n}} \in \mathbb{Q}$; en l'écrivant $\frac{p}{q}$ irréductible, $n(n+2) = \frac{p^2}{q^2}$ irréductible et entier, donc $q = 1$ et $n(n+2) = p^2$: contradiction.
- 2) Supposons $\frac{a^2 + 4b^2}{a^2 - 4b^2} = k \in \mathbb{N}$ ($a^2 - 4b^2 > 0$). Comme $a^2 + 4b^2 > a^2 - 4b^2 > 0$, $k \geq 2$. Alors $a^2 + 4b^2 = k(a^2 - 4b^2)$, soit $(k+1)4b^2 = (k-1)a^2$, donc $\frac{k+1}{k-1} = \left(\frac{a}{2b}\right)^2$ et $\sqrt{\frac{(k-1)+2}{k-1}} = \frac{a}{2b} \in \mathbb{Q}$, avec $n = k-1 \in \mathbb{N}^*$: contradiction avec 1).

Exercice 23

1. Pour $n \in \mathbb{N} : 0 < n + 3 < n + 5$, donc $0 < \frac{n+3}{n+5} < 1$: ce n'est pas un entier naturel.
2. $\frac{a + b\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{(a + b\sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}{2} = (a - b) + \frac{2b - a}{2}\sqrt{2}$. Supposons ce nombre égal à $r \in \mathbb{Q}$; comme $2b - a \neq 0$: $\sqrt{2} = \frac{2(r - a + b)}{2b - a} \in \mathbb{Q}$, contradiction.
3. $(n + 1)^2 < n^2 + 3n + 3 < (n + 2)^2$ (car $n + 2 > 0$ et $n + 1 > 0$) : $\sqrt{n^2 + 3n + 3}$ est strictement compris entre deux entiers consécutifs, donc n'est pas entier.
4. $(6a + 1)^2 = 36a^2 + 12a + 1 < 36a^2 + 12a + 2 < 36a^2 + 24a + 4 = (6a + 2)^2$, donc $u = \sqrt{36a^2 + 12a + 2} \notin \mathbb{N}$, donc $u \notin \mathbb{Z}$ ($u > 0$). Alors $9a^2 + u \notin \mathbb{Z}$; si $v = \sqrt{9a^2 + u}$ était entier, $9a^2 + u = v^2$ serait entier : absurde. Donc $v \notin \mathbb{N}$, puis de même $a^2 + v \notin \mathbb{Z}$ et $\sqrt{a^2 + v} \notin \mathbb{N}$.

Exercice 24

1. $2|a| = |(a + b) + (a - b)| \leq |a + b| + |a - b| \leq 2c$, donc $|a| \leq c$; de même $2|b| = |(a + b) - (a - b)| \leq 2c$.
2. On a $c \geq |a| \geq 0$. Les deux membres étant positifs : $(|a + b| + |a - b|)^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2|a^2 - b^2|$. Si $a^2 \geq b^2$, cela vaut $4a^2 \leq 4c^2$; sinon $4b^2 \leq 4c^2$. Donc $|a + b| + |a - b| \leq 2c$.

Exercice 25

1. Pour $x = 0, x = 2, x = -2$ (qui sont dans $[-2; 2]$) : $|c| \leq 1, |4a + 2b + c| \leq 1, |4a - 2b + c| \leq 1$.
2. $2(4a + c) = (4a + 2b + c) + (4a - 2b + c)$, donc $2|4a + c| \leq 1 + 1$ et $|4a + c| \leq 1$. Puis $4|a| = |(4a + c) - c| \leq 1 + 1$, donc $|a| \leq \frac{1}{2}$.
3. a. $(4a + 2b + c)^2 + (4a - 2b + c)^2 = 32a^2 + 8b^2 + 2c^2 + 16ac$. Donc le second membre moins le premier vaut $16ac + 16|ac| \geq 0$.
b. D'après 1) et 2) : $2(16a^2 + 4b^2 + c^2) \leq 1 + 1 + 16 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 10$, donc $16a^2 + 4b^2 + c^2 \leq 5$.

Exercice 26

Pour des entiers : $2(a + b) \leq ab + 3 \iff ab - 2a - 2b + 4 \geq 1 \iff (a - 2)(b - 2) \geq 1$. Les hypothèses donnent $(a - 2)(b - 2) \geq 1$ et $(b - 2)(c - 2) \geq 1$: donc $a - 2$ et $c - 2$ ont le même signe (strict) que $b - 2$, d'où $(a - 2)(c - 2) > 0$. Comme c'est un entier, $(a - 2)(c - 2) \geq 1$, c'est-à-dire $2(c + a) \leq ca + 3$.

Exercice 27

Comme $a \geq 1 : a^2b \geq ab$. Et $ab - (a + b - 1) = (a - 1)(b - 1) \geq 0$. Donc $c > a^2b \geq ab \geq a + b - 1$, soit $c > a + b - 1$; les nombres étant entiers, $c \geq a + b$.

Exercice 28

Minoration : $3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$, donc $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$. *Majoration* : inégalité triangulaire stricte : $a < b + c$, donc $a^2 < a(b + c)$; de même $b^2 < b(a + c)$, $c^2 < c(a + b)$. En sommant, $S = a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - S = 4 - S$, donc $S < 2$.

Exercice 29

Posons $t = \frac{EM}{EF}$ ($0 \leq t \leq 1$). Comme $(MN) \parallel (FG)$, Thalès dans EFG donne $\frac{EN}{EG} = t$, donc $\frac{GN}{GE} = 1 - t$. $(NP) \parallel (EF) \iff$ (Thalès et sa réciproque dans le triangle GEF , $N \in [GE]$, $P \in [GF]$) $\frac{GP}{GF} = \frac{GN}{GE} = 1 - t \iff FP = t \cdot FG \iff FP = t \cdot FE$ (car $FG = FE$) $\iff FP = EM$.

Exercice 30

1. Avec $n = 4$ et $(x_1; x_2; x_3; x_4) = (x; y; z; t) : (x + y + z + t)^4 \geq 4^4xyzt = 256xyzt$.
2. Avec $x_k = 2k - 1 \geq 0 : \sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$ (exercice du cours), donc $(n^2)^n \geq n^n \prod_{k=1}^n (2k - 1)$, d'où $\prod_{k=1}^n (2k - 1) \leq \frac{n^{2n}}{n^n} = n^n$.