

Cours — Chapitre 10

Vecteurs de l'espace

1^{re} année Bac Sciences Expérimentales · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Le vecteur dans l'espace — II. Vecteurs colinéaires — Points alignés — III. Vecteurs coplanaires — Points coplanaires.

Durée indicative : 4 heures. **Prérequis :** vecteurs dans le plan, translation, calcul vectoriel plan.

Hors programme : produit scalaire dans l'espace, équations cartésiennes, coordonnées dans l'espace.

I. Le vecteur dans l'espace

Activité 1

On considère un cube $ABCDEFGH$ (face avant $ABCD$, face arrière $EFGH$, avec A sous E , B sous F , etc.).

1) Citer trois vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$.

2) Simplifier $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$.

3) Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.

► Afficher / Masquer la solution

Définition 1 (vecteur dans l'espace)

Deux points distincts A et B de l'espace définissent un **vecteur** $\overrightarrow{AB}$, caractérisé par :
— une **direction** : celle de la droite (AB) ;
— un **sens** : de A vers B ;
— une **norme** : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.
Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$.

Remarque 1

Pour tout point A et tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un **unique** point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.
Le vecteur $-\vec{u}$ est l'**opposé** de $\vec{u}$: même direction, même norme, sens opposés.

Définition 2 (égalité)

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont **égaux** s'ils ont même direction, même sens et même norme.

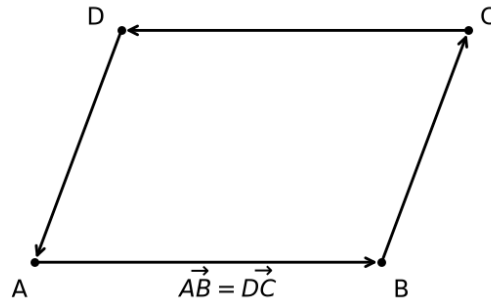


FIGURE 1 – Égalité de vecteurs et parallélogramme

Propriété 1

Soit $ABCD$ un quadrilatère de l'espace. On a

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff ABCD \text{ est un parallélogramme.}$$

Remarque 2 (opérations)

L'ensemble des vecteurs de l'espace est muni de l'**addition** (Chasles, règle du parallélogramme) et de la **multiplication par un réel**, avec les mêmes règles qu'en géométrie plane :

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}, \quad (-1)\vec{u} = -\vec{u}, \quad a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u},$$

$$(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}, \quad a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}.$$

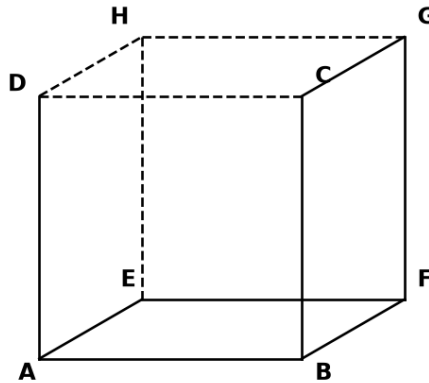
De plus : $a\vec{u} = \vec{0} \iff a = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}$.

Tous les résultats de géométrie plane restent valables **dans chaque plan** de l'espace.

Exemple 1

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

- 1) Simplifier $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG}$.
- 2) Construire les points M et P tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

FIGURE 2 – Cube $ABCDEFGH$

► Afficher / Masquer la solution

II. Vecteurs colinéaires — Points alignés

Définition 3 (colinéarité)

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont **colinéaires** s'ils ont la même direction.
On convient que $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

Propriété 2

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel a tel que $\vec{u} = a\vec{v}$.

Remarque 3

$(AB) \parallel (CD)$ (avec $A \neq B$, $C \neq D$) si et seulement s'il existe un réel a tel que $\overrightarrow{CD} = a\overrightarrow{AB}$.

Définition 4 (alignement)

Trois points A , B , C de l'espace sont **alignés** s'ils appartiennent à une même droite.

Propriété 3

Les points A , B , C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires : il existe un réel a tel que $\overrightarrow{AC} = a\overrightarrow{AB}$.

Exemple 2

Soit $ABCDEFGH$ un cube. On place I tel que $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EG}$. Soit K le point tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

1) Exprimer $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{AK}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

2) En déduire que $(EI) \parallel (AK)$.

► Afficher / Masquer la solution

Définition 5 (droite incluse dans un plan)

Une droite (D) est **incluse** dans un plan (P) , noté $(D) \subset (P)$, si elle contient deux points distincts de (P) . En particulier, si $A \neq B$, $(AB) \subset (P)$ dès que $A \in (P)$ et $B \in (P)$.

Propriété 4

Une droite (D') est **parallèle** à un plan (P) si et seulement si elle est parallèle à une droite (D) incluse dans (P) . On note alors $(D') \parallel (P)$.

Remarque 4

- Deux droites parallèles à un même plan ne sont pas nécessairement parallèles entre elles.
- Deux droites orthogonales dans l'espace ne sont pas nécessairement perpendiculaires (elles peuvent être non coplanaires).

Propriété 5 (définition vectorielle d'une droite)

Soit A un point et $\vec{u}$ un vecteur non nul. La droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, notée $\mathcal{D}(A; \vec{u})$, est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires :

$$M \in \mathcal{D}(A; \vec{u}) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{u}.$$

III. Vecteurs coplanaires — Points coplanaires

Remarque 5 (vecteurs d'un plan)

Soit (P) un plan. Si $\vec{u} \in (P)$ et $\vec{v} \in (P)$, alors $\vec{u} + \vec{v} \in (P)$ et, pour tout réel k , $k\vec{u} \in (P)$.

Définition 6 (coplanarité de vecteurs)

Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace sont **coplanaires** s'il existe un plan les contenant tous les trois.

Propriété 6

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe des réels a, b tels que

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

(lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires ; sinon la condition se reformule de façon analogue).

Définition 7 (points coplanaires)

Quatre points A, B, C, D sont **coplanaires** s'ils appartiennent à un même plan.

Propriété 7

A, B, C, D sont coplanaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sont coplanaires : il existe des réels a, b tels que

$$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}.$$

Exemple 3

Soit $ABCDEFGH$ un cube. Soit I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[EH]$.

- 1) Vérifier que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EJ}$.
- 2) En déduire que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
- 3) Montrer que $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont coplanaires.

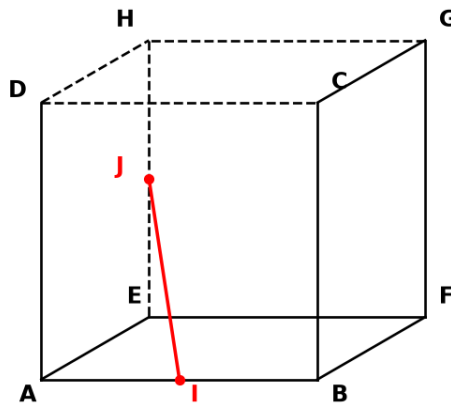


FIGURE 3 – Cube avec milieux I et J

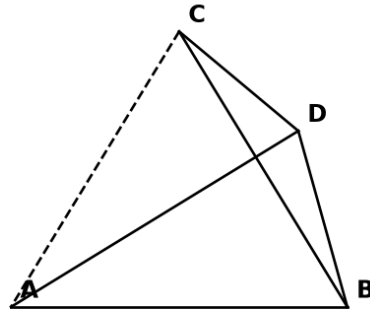
► Afficher / Masquer la solution

Exemple 4

Soient A, B, C, D quatre points non coplanaires, et T le point tel que

$$2\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AD}.$$

Montrer que A, C, D, T sont coplanaires.

FIGURE 4 – Tétraèdre $ABCD$

► Afficher / Masquer la solution

Propriété 8 (définition vectorielle d'un plan)

Soit A un point et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs **non colinéaires**. Le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}, \vec{v}$, noté $\mathcal{P}(A; \vec{u}; \vec{v})$, est l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{AM} = a\vec{u} + b\vec{v} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

En particulier, si A, B, C ne sont pas alignés :

$$M \in (ABC) \iff \exists a, b \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}.$$

Méthode

Pour travailler dans l'espace sans coordonnées :

1. Choisir une base adaptée $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ sur un cube ou un parallélépipède.
2. Traduire milieux et relations par des égalités vectorielles.
3. Pour l'alignement : montrer une colinéarité $\overrightarrow{AC} = a\overrightarrow{AB}$.
4. Pour la coplanarité : écrire un vecteur comme combinaison linéaire de deux autres.