

Cours — Chapitre 09

Dérivation

1^{re} année Bac Sciences Expérimentales · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Dérivabilité en un point — II. Interprétation géométrique — III. Approximation affine — IV. Dérivabilité à droite et à gauche — V. Fonction dérivée — VI. Opérations sur les dérivées — VII. Dérivées successives — VIII. Sens de variation — IX. Extremums — X. Équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$.

Durée indicative : 10 heures. **Prérequis :** limites d’une fonction, fonctions de référence, trigonométrie.

I. Dérivabilité d’une fonction en un point

Activité 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2$.

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 6$.

2) En déduire que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = 6$.

3) Montrer que f est dérivable en -1 et calculer $f'(-1)$.

► Afficher / Masquer la solution

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.
On dit que f est **dérivable en** a s’il existe un réel ℓ tel que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell.$$

Le réel ℓ est appelé **nombre dérivé** de f en a . On le note $f'(a)$.

Remarque 1

Si l’on pose $h = x - a$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$ est équivalent à $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \ell$.

Application 1

Étudier la dérivabilité de la fonction f en a dans les cas suivants :

1) $f(x) = x^2$ et $a = 1$; **2)** $f(x) = 2x^2 - 7x + 7$ et $a = 2$;

3) $f(x) = \sin(2x)$ et $a = 0$; **4)** $f(x) = \cos x$ et $a = 0$.

► Afficher / Masquer la solution

II. Interprétation géométrique du nombre dérivé

Définition 2

Soit f une fonction dérivable en a et (C_f) sa courbe représentative.

On appelle **tangente** à (C_f) au point d'abscisse a la droite passant par $A(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Son équation est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Application 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+3}$ et (C_f) sa courbe représentative. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1.

► Afficher / Masquer la solution

Remarque 2

La tangente en un point de la courbe permet de déterminer la position de celle-ci au voisinage de ce point. Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ appartiennent à la tangente (T) , alors $f'(a) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

III. Approximation affine d'une fonction

Définition 3

Soit f dérivable en a . La fonction affine g définie par $g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ est appelée **approximation affine** de f au voisinage de a . Pour tout réel h voisin de a , on a $f(h) \simeq g(h)$.

Application 3

On considère la fonction f définie par $f(x) = (1+x)^2$.

- 1) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
- 2) Déterminer la fonction g , approximation affine de f au voisinage de 0.
- 3) Vérifier que $(1,0001)^2 = f(0,0001)$ et $(1,009)^2 = f(0,009)$, puis en déduire une valeur approchée de ces deux nombres.

- 4) Montrer que, pour tout réel h voisin de zéro, on a $(1+h)^2 \simeq 1+2h$.

► Afficher / Masquer la solution

IV. Dérivabilité à droite et à gauche

Définition 4

Soit f définie sur un intervalle de la forme $[a; b[$.

On dit que f est **dérivable à droite en a** si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est finie. Cette limite est notée $f'_d(a)$.

Soit f définie sur un intervalle de la forme $]b; a]$.

On dit que f est **dérivable à gauche en a** si $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est finie. Cette limite est notée $f'_g(a)$.

Application 4

Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en a dans les cas suivants :

- 1) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 4 \\ x^2 + 3 & \text{si } x < 4 \end{cases}, a = 4;$
- 2) $f(x) = |x - 3|, a = 3.$

► Afficher / Masquer la solution

Propriété 3

Une fonction f est dérivable en a si, et seulement si, f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Application 5

Étudier la dérivabilité de f en a dans les cas de l'application précédente.

► Afficher / Masquer la solution

Remarque

Interprétation géométrique. Si f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a , alors (C_f) admet au point $A(a; f(a))$ une **demi-tangente** d'équation $y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$ avec $x \geq a$ (resp. $y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$ avec $x \leq a$).

Exemple 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x^2 - x|$. Étudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement.

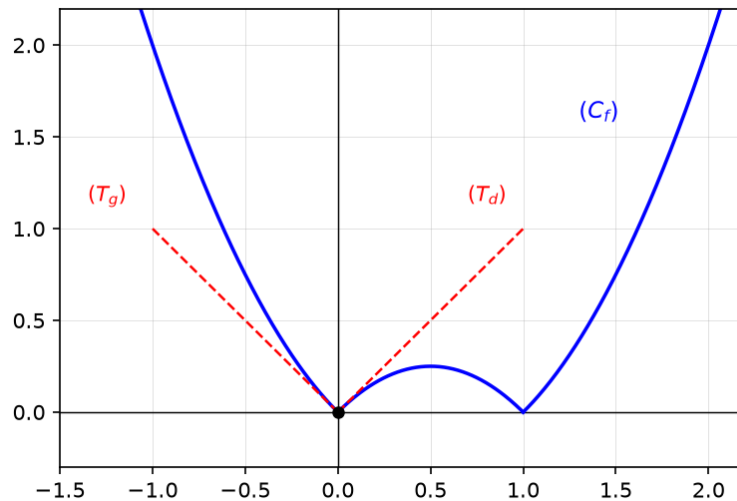


FIGURE 1 – Demi-tangentes en un point anguleux

► Afficher / Masquer la solution

Application 6

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x \geq 2 \\ x^3 - 7 & \text{si } x < 2 \end{cases}$. Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 2, puis interpréter graphiquement.

► Afficher / Masquer la solution

Propriété 4

Si $\lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, alors (C_f) admet au point d'abscisse a une **demi-tangente verticale** d'équation

V. Dérivabilité sur un intervalle et fonction dérivée

Activité 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$.

1) Déterminer D_f et montrer que f n'est pas dérivable à droite en 0.

2) Soit $t \in]0; +\infty[$. Montrer que f est dérivable en t et que $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$.

► Afficher / Masquer la solution

Définition 5

Soit f définie sur un intervalle ouvert I . On dit que f est **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout point de I .

Remarque 4

f est dérivable sur $[a; b]$ lorsqu'elle est dérivable sur $]a; b[$, à droite en a et à gauche en b .

Définition 6

Soit f définie sur un intervalle I . On appelle **fonction dérivée** de f , notée f' , la fonction qui à tout $x \in I$ associe $f'(x)$.

Exemple 2

On considère $f(x) = x^3$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable en t et déterminer f' .

► Afficher / Masquer la solution

Propriété 5 (dérivées usuelles)		
$f(x)$	D_f	$f'(x)$
c (constante)	$\mathbb{R}$	0
$ax + b$	$\mathbb{R}$	a
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (sur $]0; +\infty[$)
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$	$1 + \tan^2 x$
$\cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$	$-a \sin(ax + b)$
$\sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$	$a \cos(ax + b)$

Application 7

Déterminer la fonction dérivée de f dans les cas suivants : $f(x) = x^7$; $f(x) = x^{25}$; $f(x) = \frac{1}{x}$; $f(x) = -5x + 3$; $f(x) = \sqrt{x}$; $f(x) = \sin(-5x + 3)$.

► Afficher / Masquer la solution

VI. Opérations sur les fonctions dérivées**Propriété 6**

Soient u et v dérivables sur un intervalle I , $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Fonction	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
au	au'
$\frac{1}{u}$ ($u \neq 0$)	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ ($v \neq 0$)	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}$ ($u > 0$)	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n	$nu'u^{n-1}$

Exemple 3

Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^4 + x^2$. Calculer $h'(x)$.

► Afficher / Masquer la solution

Application 8

Calculer $f'(x)$ dans les cas suivants : $f(x) = \sqrt{x} + x^3$; $f(x) = x \cos x$; $f(x) = 3 \sin x$; $f(x) = (2x + 3)^4$; $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$; $f(x) = \frac{x + 3}{x^2 + 6}$.

► Afficher / Masquer la solution

Propriété 7

Toute fonction polynomiale est dérivable sur $\mathbb{R}$. Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle de son ensemble de définition.

Application 9

En utilisant la définition du nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^7 - 128}{x - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad (n \in \mathbb{N}^*);$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}}; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin x - \sqrt{2}}{x - \frac{\pi}{4}}.$$

► Afficher / Masquer la solution

VII. Dérivées successives

Définition 7

Si f' est dérivable sur I , on dit que f est deux fois dérivable. La dérivée de f' est la **dérivée seconde**, notée f'' ou $f^{(2)}$.

Exemple 4

Soit $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 5$. Calculer f' , f'' , $f^{(3)}$ et $f^{(n)}$ pour $n \geq 4$.

► Afficher / Masquer la solution

Application 10

- 1) Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Calculer la dérivée d'ordre 3 de f .
- 2) Soit $g(x) = \sin x$. Déterminer $g'(x)$, $g''(x)$ et $g^{(4)}(x)$.

► Afficher / Masquer la solution

VIII. Dérivée et sens de variation

Activité 3

On considère $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$.

- 1)** Déterminer D_f . **2)** Déterminer $D_{f'}$. **3)** Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
4) Calculer $f'(x)$. **5)** Dresser le tableau de variations de f .
6) Déterminer l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 2.

► [Afficher / Masquer la solution](#)

Propriété 8

Soit f dérivable sur un intervalle I .

- f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
- f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.
- f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.
- Si $f' \geq 0$ (resp. ≤ 0) sur I et ne s'annule qu'en des points isolés, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I .

Application 11

On considère $f(x) = -x^3 + x^2 + 5x + 1$.

- 1)** D_f ; **2)** $D_{f'}$; **3)** limites aux bornes; **4)** $f'(x)$; **5)** tableau de variations; **6)** tangente en 2.

► [Afficher / Masquer la solution](#)

IX. Dérivée et extremums**Activité 4**

On considère $f(x) = x^2 - 2x + 5$.

- 1)** Étudier les variations de f . **2)** En déduire qu'elle admet un extremum. **3)** En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) \geq 4$.

► [Afficher / Masquer la solution](#)

Propriété 9

Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

- Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.
- Si $f'(a) = 0$ et f' change de signe au voisinage de a , alors $f(a)$ est un extremum local de f .

Remarque 9

$f'(a) = 0$ ne suffit pas : pour $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$ mais $f(0)$ n'est pas un extremum.

Application 12

- 1) Dresser le tableau de variations de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- 2) En déduire que f admet une valeur maximale globale à déterminer.

► Afficher / Masquer la solution

Application 13

Déterminer les extremums locaux de $f(x) = x^3 + 3x^2$.

► Afficher / Masquer la solution

Application 14

Montrer que $(\forall x \in [0; +\infty[) x - \cos x \geq -1$. (Indication : étudier $f(x) = x - \cos x$.)

► Afficher / Masquer la solution

X. L'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$

Activité 5

Soit $f(x) = \cos(3x)$. Vérifier que $f''(x) + 9f(x) = 0$.

► Afficher / Masquer la solution

Définition 8

Une **équation différentielle** relie une fonction inconnue à une ou plusieurs de ses dérivées.

Soit $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Les solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions $y(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x)$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

Application 15

- 1) Résoudre : $(E_1) : y'' + 4y = 0$; $(E_2) : y'' + 16y = 0$; $(E_3) : y'' + 5y = 0$; $(E_4) : 2y'' + 16y = 0$.
2) Déterminer la solution de (E_2) telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$.

► [Afficher](#) / [Masquer la solution](#)

Remarque 10

L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ admet une unique solution vérifiant $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$. Les solutions de $y'' = 0$ sont les fonctions affines $x \mapsto ax + b$.